Lei 13,70

ISBN 973 — 30 — 0061 — 2

EDITURA DIDACTICĂ ŞI PEDAGOGICĂ - BUCUREŞTI, 1989

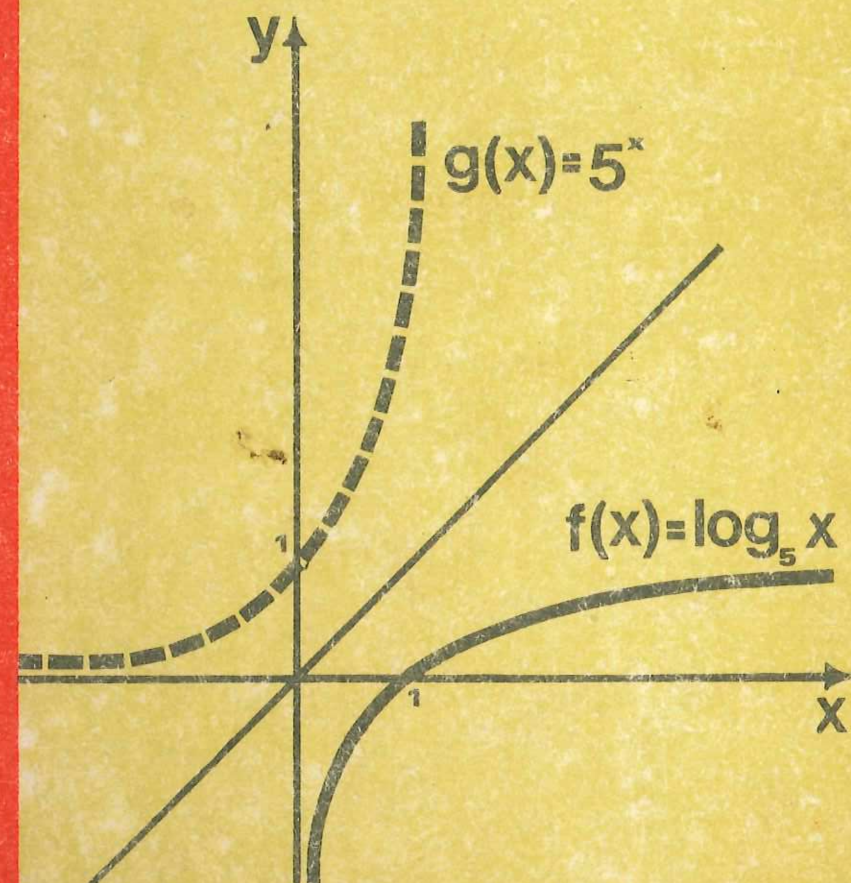
MINISTERUL EDUCAŢIEI ŞI ÎNVĂŢĂMÎNTULUI

Matematică

Manual pentru clasa a X-a

X

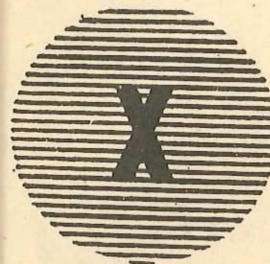
Algebră



MINISTERUL EDUCAȚIEI ȘI ÎNVĂȚĂMÎNTULUI

C. Năstăsescu

C. Niță



Matematică

Manual pentru clasa a X-a

Algebră



EDITURA DIDACTICĂ ȘI PEDAGOGICĂ, BUCUREȘTI

Manualul a fost elaborat în 1979. Actuala ediție este în concordanță cu programa școlară aprobată de Ministerul Educației și Învățămîntului cu nr. 39732/1987.

Referenți: Lector univ. dr. *Ion Tomescu*
Prof. *Silvia Florescu*
Prof. *Eugen Onofraș*

Capitolul V, Elemente de prelucrare automată a datelor, a fost elaborat de:
H. Georgescu
T. Bălănescu
V. Ștefănescu
și avizat de Comisia de matematică a Ministerului Educației și Învățămîntului.

ISBN 973 — 30 — 0061 — 2

Redactor: Prof. *Viorica Fătu*
Tehnoredactor: *Ana Timpău*
Coperta: *N. Sîrbu*

I Funcția exponențială și funcția logaritmică

§ 1. Funcția exponențială

1.1. Puteri cu exponent rațional (recapitulare)

În clasa a IX-a s-a definit puterea cu exponent rațional. Să amintim această definiție.

1. *Puteri cu exponent rațional pozitiv.* Dacă $a \geqslant 0$ este un număr real nenegativ, iar $\frac{m}{n}$ un număr rațional pozitiv, atunci

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}. \qquad (1)$$

2. *Puteri cu exponent rațional negativ.* Dacă $a > 0$ este un număr real pozitiv, iar $\frac{m}{n}$ un număr rațional negativ, atunci

$$a^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{-\frac{m}{n}}}. \qquad (2)$$

Deoarece numărul $-\frac{m}{n}$ este pozitiv, $a^{-\frac{m}{n}}$ a fost definit la punctul 1.

3. În sfîrșit, dacă $a > 0$ iar $\frac{m}{n} = 0$, atunci

$$a^0 = 1. \qquad (3)$$

Relațiile (1), (2) și (3) definesc puterea unui număr pozitiv $a > 0$, pentru orice exponent rațional $\frac{m}{n}$. În clasa a IX-a s-au studiat o serie de proprietăți ale puterilor cu exponent rațional oarecare. În cele ce urmează vom folosi în special proprietățile date de următoarea teoremă.

Teorema 1.1.1. **1°.** Dacă $a>1$ este un număr real, atunci dintre două puteri cu exponent rațional pozitiv ale acestui număr, este mai mare aceea al cărei exponent este mai mare.

2°. Dacă $0 < a < 1$ este un număr real, atunci dintre două puteri cu exponent rațional pozitiv ale acestui număr, este mai mare aceea al cărei exponent este mai mic.

Demonstrație. 1°. Într-adevăr, fie $\frac{m}{n} > \frac{p}{q} > 0$ două numere raționale pozitive. Avem $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ și $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$. Aducem acești radicali la radicali de același ordin:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nq]{a^{mq}}, \quad \sqrt[q]{a^p} = \sqrt[nq]{a^{np}}.$$

Cum $\frac{m}{n} > \frac{p}{q}$, rezultă că $mq > np$. Dar, cum $a > 1$ rezultă $a^{mq} > a^{np}$, de unde $\sqrt[nq]{a^{mq}} > \sqrt[nq]{a^{np}}$ sau

$$a^{\frac{m}{n}} > a^{\frac{p}{q}}.$$

2°. Demonstrația este analoagă cu cea de la punctul 1° și de aceea o omitem.

Exemple. 1) Avem $1,21 < 1,22$. De aceea

$$2^{1,21} < 2^{1,22}; \quad \left(\frac{1}{2}\right)^{1,21} > \left(\frac{1}{2}\right)^{1,22}.$$

2) Avem $0,3 < 0,4$. De aceea

$$(\sqrt{3})^{0,3} < (\sqrt{3})^{0,4}; \quad \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{0,3} > \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{0,4}.$$

1.2. Puteri cu exponent real oarecare

În acest paragraf vom defini puterea cu exponent real oarecare de bază pozitivă, astfel încît aceasta să coincidă pentru exponent rațional cu cea introdusă mai înainte.

Mai precis, dacă $a > 0$ este un număr real pozitiv, iar x un număr real oarecare, ne propunem să dăm sens expresiei a^x.

Amintim, mai întîi, cîteva fapte privind aproximările zecimale ale numerelor reale.

Fie x un număr real oarecare reprezentat sub formă de fracție zecimală infinită, adică $x = x_0, x_1x_2x_3...x_n...$. Pentru numărul x, aproximările zecimale cu o eroare mai mică decît 10^{-n} sînt:

i) prin lipsă: $x_n = x_0, x_1x_2x_3...x_n$,
ii) prin adaos: $x_n = x_0, x_1x_2x_3...x_n + 10^{-n}$.

Așadar numărului x i-am asociat aproximările sale zecimale:

prin lipsă: $x'_0, x'_1, x'_2, x'_3, \ldots$,
prin adaos: $x''_0, x''_1, x''_2, x''_3, \ldots$,

astfel încît:

$$x'_0 \leqslant x < x''_0,$$
$$x'_1 \leqslant x < x''_1,$$
$$x'_2 \leqslant x < x''_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Observăm că aproximările zecimale prin lipsă și prin adaos ale unui număr real x sînt totdeauna numere raționale.

1. *Puteri cu exponent real pozitiv*

Pentru definirea puterii de bază $a > 0$, cu exponent real, distingem două cazuri, după cum baza este supraunitară sau subunitară:

1° $a > 1$. Fie $x > 0$ un număr real și să considerăm aproximările zecimale prin lipsă și prin adaos cu o eroare mai mică decît 10^{-n}. Atunci pentru orice n, avem

$$x'_n \leqslant x < x''_n.$$

După cum am observat numerele x'_n, x''_n sînt raționale pozitive și deci conform definiției puterilor cu exponent rațional, au sens puterile $a^{x'_n}$ și $a^{x''_n}$, pentru orice n.

Mai mult, după punctul 1° al teoremei 1.1.1, rezultă că $a^{x'_n} < a^{x''_n}$.

Definiția 1.2.1. **Fie $a > 1$ și x un număr real pozitiv. Se numește *puterea x a lui a* un număr real y, care pentru orice număr natural n satisface inegalitățile:**

$$a^{x'_n} \leqslant y < a^{x''_n}.$$

Se poate demonstra că un astfel de număr real y există și, mai mult, este unic. Demonstrația riguroasă a acestui fapt depășește programa clasei a X-a. Ea necesită noțiunea de limită și se va studia la Analiză matematică în clasa a XI-a.

Numărul y dat de definiția precedentă se notează a^x și se citește *a la puterea x*.

Exemplu. Să explicăm ce trebuie înțeles prin $3^{\sqrt{2}}$. Aproximările zecimale ale lui $\sqrt{2}$ sînt următoarele:

prin lipsă: 1; 1,4; 1,41; 1,414; ...,
prin adaos: 2; 1,5; 1,42; 1,415; ...;

astfel încît:

$$1 \leqslant \sqrt{2} < 2,$$
$$1,4 \leqslant \sqrt{2} < 1,5,$$
$$1,41 \leqslant \sqrt{2} < 1,42,$$
$$1,414 \leqslant \sqrt{2} < 1,415,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Numărul care ne interesează $y = 3^{\sqrt{2}}$ îndeplinește inegalitățile:

$$3^1 \leqslant y < 3^2$$
$$3^{1,4} \leqslant y < 3^{1,5},$$
$$3^{1,41} \leqslant y < 3^{1,42},$$
$$3^{1,414} \leqslant y < 3^{1,415},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

2° $0 < a < 1$. Dacă $x > 0$ este un număr real, avem

$$x'_n \leqslant x < x''_n.$$

După punctul 2° al teoremei din paragraful precedent rezultă că $a^{x''_n} < a^{x'_n}$.

Definiția 1.2.2. **Fie $0 < a < 1$ și x un număr real pozitiv. Se numește *puterea x a lui a* un număr real y, care pentru orice număr natural n, satisface inegalitățile:**

$$a^{x''_n} < y \leqslant a^{x'_n}.$$

Se poate demonstra că un astfel de număr real y există și, mai mult, este unic

Exemplu. Să explicăm ce trebuie înțeles prin $\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$.

Avînd în vedere cele de mai înainte precum și tabelul aproximărilor zecimale ale lui $\sqrt{2}$ din exemplul precedent, numărul care ne interesează $y = \left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{2}}$ îndeplinește inegalitățile:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{2} < y \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^{1},$$
$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1,5} < y \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^{1,4},$$
$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1,42} < y \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^{1,41},$$
$$\left(\frac{1}{3}\right)^{1,415} < y \leqslant \left(\frac{1}{3}\right)^{1,414},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Vom adăuga că pentru orice număr real x,

$$1^x = 1.$$

În final trebuie menționată o proprietate importantă a puterilor cu exponent pozitiv și anume:

Oricare ar fi $a > 0$ și $x > 0$ avem $a^x > 0$.

Într-adevăr, fie x'_n și x''_n aproximările zecimale ale lui x prin lipsă, respectiv prin adaos. Atunci, pentru orice n, avem:

1° Dacă $a > 1$, atunci

$$a^{x'_n} \leqslant a^x < a^{x''_n}.$$

2° Dacă $0 < a < 1$, atunci

$$a^{x''_n} < a^x \leqslant a^{x'_n}.$$

Numerele x'_n și x''_n sînt raționale și pozitive. De aceea $a^{x'_n} > 0$ și $a^{x''_n} > 0$, pentru orice $a > 0$. Atunci, evident, $a^x > 0$ deoarece este cuprins între două numere pozitive.

2. *Puteri cu exponent real negativ*

Dacă $a > 0$ și x este un număr real negativ, atunci prin definiție

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}}. \qquad (1)$$

Deoarece numărul $-x$ este pozitiv, a^{-x} a fost definit la punctul 1.

Mai mult, am demonstrat că $a^{-x} \neq 0$, pentru $-x > 0$.

De exemplu, $3^{-\sqrt{5}} = \frac{1}{3^{\sqrt{5}}}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{5}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{5}}}$.

Am demonstrat că dacă $x > 0$ atunci $a^{-x} > 0$. Cum $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$, rezultă că *și pentru $x < 0$, avem $a^x > 0$.*

Amintim că pentru $a \neq 0$, am convenit să punem $a^0 = 1$.

Astfel, am definit puterea unui număr pozitiv cu orice exponent real. Puterea unui număr negativ cu exponent real, în general, nu este definită.

3. *Proprietăți ale puterilor cu exponent real*

Fie $a > 0$ și $b > 0$ (numere reale pozitive). Atunci pentru x și y numere reale, avem:

1. $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$,
2. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$,
3. $(ab)^x = a^x b^x$,
4. $\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$.
5. $(a^x)^y = a^{xy}$.

Pe baza definiției puterii cu exponent real dată mai înainte și folosind proprietățile corespunzătoare ale puterii cu exponent rațional, verificarea acestora se face fără dificultate. Lăsăm ca exercițiu demonstrarea lor.

Exemple. 1) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{3}} = (2^{-1})^{-\sqrt{3}} = 2^{\sqrt{3}}$.

2) $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{3}}\right]^{-\sqrt{27}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{81}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-9} = (2^{-1})^{-9} = (2^1)^9 = 2^9 = 512.$

3) $\frac{7^{\sqrt{8}}}{7^{\sqrt{2}}} = 7^{\sqrt{8}-\sqrt{2}} = 7^{2\sqrt{2}-\sqrt{2}} = 7^{\sqrt{2}}.$

1.3. Funcția exponențială

Fie $a > 0$ un număr real pozitiv. Am văzut în paragraful 1.2 (pct. 1 și 2) că oricare ar fi numărul real x, avem $a^x > 0$. Așadar, putem defini funcția următoare:

$$f : \mathbf{R} \to (0, \infty),\ f(x) = a^x.$$

Observație. Pentru $a = 1$ se obține o funcție constantă $f : \mathbf{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = 1$ și de aceea aceest caz nu prezintă un interes special.

O funcție $f : \mathbf{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = a^x$, unde $a > 0$ și $a \neq 1$, se numește *funcție exponențială (de bază a).*

Enunțăm, în continuare, o serie de proprietăți importante ale funcției exponențiale.

1. *Dacă $a > 1$, atunci pentru $x > 0$ avem $a^x > 1$, iar pentru $x < 0$ avem $a^x < 1$. Dacă $a < 1$, atunci pentru $x > 0$ avem $a^x < 1$, iar pentru $x < 0$ avem $a^x > 1$.*

Demonstrație. Fie $a > 1$ și $x > 0$. Dacă x este rațional, adică $x = \frac{m}{n}$, atunci $a^x = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$. Cum $a > 1$ rezultă că și $a^m > 1$, dar atunci și $\sqrt[n]{a^m} > 1$. Dacă x este un număr real pozitiv oarecare, fie x'_n și x''_n, pentru orice n, aproximările zecimale prin lipsă și prin adaos ale lui x. Atunci

$$x'_n \leqslant x < x''_n.$$

Cum $a > 1$, rezultă că pentru orice n avem

$$a^{x'_n} \leqslant a^x < a^{x''_n}.$$

Dar x'_n este rațional pozitiv și după cum am observat mai înainte $a^{x'_n} > 1$, de unde $a^x > 1$.

Dacă $x < 0$, atunci avem

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}}.$$

Dar $-x > 0$ și deci $a^{-x} > 1$. Prin urmare

$$a^x = \frac{1}{a^{-x}} < 1.$$

Cazul în care $0 < a < 1$ se tratează analog; îl lăsăm ca exercițiu.

2. *Dacă $x = 0$, atunci independent de $a > 0$ avem $a^x = 1$.*

Aceasta rezultă din definiția puterii nule.

3. *Pentru $a > 1$, funcția exponențială $f(x) = a^x$ este strict crescătoare, iar pentru $0 < a < 1$ este strict descrescătoare.*

Demonstrație. Fie $a > 1$ și $x_1 < x_2$. Să arătăm că

$$a^{x_1} < a^{x_2}.$$

Într-adevăr, din $x_1 < x_2$ rezultă că există $u > 0$ astfel încît $x_2 = x_1 + u$. Atunci

$$a^{x_1} - a^{x_2} = a^{x_1} - a^{x_1+u} = a^{x_1}(1 - a^u).$$

Deoarece $u > 0$, după proprietatea 1 a funcției exponențiale rezultă $a^u > 1$. Așadar, $a^{x_1} > 0$ și $1 - a^u < 0$, de unde $a^{x_1}(1 - a^u) < 0$. Înseamnă că $a^{x_1} - a^{x_2} < 0$, sau $a^{x_1} < a^{x_2}$. Deci din $x_1 < x_2$ rezultă $a^{x_1} < a^{x_2}$, adică funcția $f(x) = a^x$ este strict crescătoare.

Analog, se demonstrează că pentru $0 < a < 1$ funcția $f(x) = a^x$ este strict descrescătoare.

4. *Funcția exponențială $f : \mathbf{R} \to (0, \infty)$, $f(x) = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ este bijectivă.*

Demonstrație. Să arătăm mai întîi că f este injectivă. Fie, pentru aceasta, $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ astfel încît $x_1 \neq x_2$. Atunci avem $x_1 < x_2$ sau $x_1 > x_2$. Să presupunem, de exemplu, că $x_1 < x_2$. Atunci după monotonia funcției exponențiale (proprietatea 3) rezultă:

1. dacă $a > 1$, atunci $f(x_1) < f(x_2)$ și deci $f(x_1) \neq f(x_2)$;
2. dacă $0 < a < 1$, atunci $f(x_1) > f(x_2)$ și deci $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Analog, rezultă pentru $x_1 > x_2$. Deci f este injectivă. Demonstrația faptului că funcția exponențială f este surjectivă depășește programa clasei a X-a. Ea necesită noțiunea de continuitate și se va face la Analiză matematică în clasa a XI-a. Cu alte cuvinte, se poate demonstra că oricare ar fi $y_0 > 0$, un număr real pozitiv, există un număr real x_0 astfel încît $a^{x_0} = y_0$. (Conform injectivității funcției f rezultă că x_0 este unic.)

5. *Funcția exponențială $f(x) = a^x$ este inversabilă.*

Această proprietate este evidentă, deoarece orice funcție bijectivă este inversabilă.

În § 2 ne vom ocupa de studiul inversei funcției exponențiale.

I.4. Graficul funcției exponențiale

Pe aceeași figură vom reprezenta graficul funcțiilor $f(x) = 2^x$ și $g(x) = 5^x$, iar pe alta al funcțiilor $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ și $k(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$. Trasarea fiecărui grafic se face „prin puncte". Asociem tabelele de valori următoare:

x	$-\infty$	-3	-2	-1	0	1	2	3	$+\infty$
$f(x) = 2^x$		$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	
$h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$		8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	

Observăm că pentru $x = \pm 2$, ± 3 și, în general, pentru x întreg diferit de ± 1, valorile funcțiilor $g(x) = 5^x$ și $k(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ sînt ori foarte mari, ori foarte mici, deci punctele corespunzătoare sînt greu de figurat pe grafic. De aceea, în acest caz, vom lua pentru x valori fracționare cuprinse între -1 și 1, de exemplu: $x = -1, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1$. Valorile funcțiilor vor fi calculate aproximativ. Astfel:

$$5^0 = 1;$$

$$5^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{5} = \sqrt{\sqrt{5}} \approx \sqrt{2{,}2360} \approx 1{,}5;$$

$$5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} \approx 2{,}24;$$

$$5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^3} = (\sqrt[4]{5})^3 \approx 3{,}34;$$

$$5^1 = 5;$$

$$5^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{5^{\frac{1}{4}}} \approx \frac{1}{1{,}5} \approx 0{,}66; \text{ ș.a.m.d.}$$

x	$-\infty$	-1	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1	$+\infty$
$g(x) = 5^x$		0,2	0,3	0,45	0,66	1	1,5	2,24	3,34	5	
$k(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$		5	3,34	2,24	1,5	1	0,66	0,45	0,3	0,2	

Prezentăm într-un sistem de axe xOy punctele ale căror coordonate sînt valorile din tabelele de mai sus. Punctele obținute le unim printr-o linie continuă.

În figura I. 1 sînt reprezentate graficele funcțiilor $f(x) = 2^x$ și $g(x) = 5^x$, iar în figura I. 2 sînt reprezentate graficele funcțiilor $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ și $k(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$.

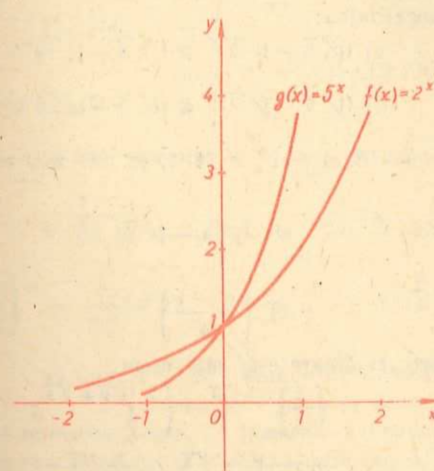


Fig. I. 1

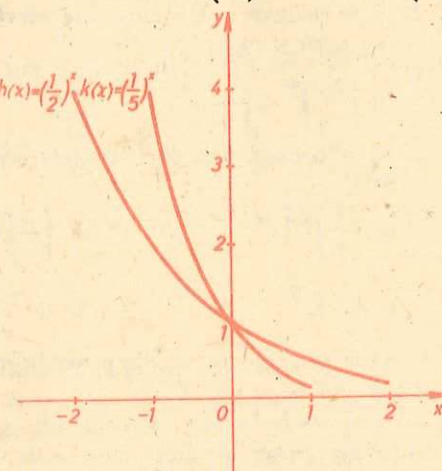


Fig. I. 2

Analizînd graficul funcției exponențiale pentru diverse baze, constatăm că el are următoarele proprietăți:

1) Trece prin punctul de coordonate (0, 1) de pe axa Oy.

2) Graficul funcției exponențiale este constituit dintr-o singură ramură care „urcă" pentru baza $a > 1$ și „coboară" pentru baza $0 < a < 1$.

3) Graficul funcției exponențiale este din ce în ce mai „apropiat" de axele Ox și Oy cu cît a este mai mare, dacă $a > 1$, sau cu cît a este mai mic, dacă $0 < a < 1$.

Exerciții

1. Să se afle care număr din perechile de numere următoare este mai mare:

a) $3^{\frac{4}{5}}$ și $3^{\frac{5}{6}}$; d) $(0,5)^{-13}$ și 2^{13}; g) $5^{\sqrt{3}}$ și $5^{\sqrt{2,5}}$;

b) $\sqrt[11]{6^3}$ și $\sqrt[15]{6^7}$; e) $(\sqrt{3})^{-6}$ și $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^6$; h) $\sqrt[6]{\left(\frac{7}{8}\right)^{38}}$ și $\sqrt[5]{\left(\frac{7}{8}\right)^{33}}$.

c) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{7}{2}}$ și $\left(\frac{2}{5}\right)^4$; f) $2^{-\sqrt{5}}$ si $2^{-\sqrt{3}}$;

2. Să se aducă la formă mai simplă expresiile:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{13} \cdot 4^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^{\sqrt{27}} \cdot 16^3$; c) $[(\sqrt[3]{5})^{\sqrt{5}}]^{-3\sqrt{5}}$;

b) $\frac{12^{\sqrt{48}}}{4^{\sqrt{108}}} \cdot \frac{2^{27\sqrt{3}}}{6^{\sqrt{27}}}$; d) $[(\sqrt{8})^{-4\frac{1}{3}}]^{\frac{\sqrt{3}}{26}}$.

3. Să se afle mulțimea valorilor lui x pentru care este adevărată inegalitatea:

a) $3^x \geqslant 729$; d) $3^x < 3$; g) $\left(\frac{1}{81}\right)^x \sqrt{3} > 1$;

b) $2^x \leqslant 0,25$; e) $(\sqrt{2})^x \cdot 2 > \frac{1}{8}$; h) $\left(\frac{1}{\sqrt[5]{0,5}}\right)^x < \frac{1}{4}$;

c) $2^x > \frac{1}{128}$; f) $(0,01)^2 (\sqrt{10})^x < 1$; i) $32\,(\sqrt[3]{2})^x > 0,25$.

4. Să se compare m și n dacă este adevărată inegalitatea:

a) $(3\pi)^m > (3\pi)^n$; c) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^m \geqslant (\sqrt{3}-\sqrt{2})^n$;

b) $\left(\frac{5\pi}{16}\right)^m < \left(\frac{5\pi}{16}\right)^n$; d) $(\sqrt{7}-\sqrt{3})^m \leqslant (\sqrt{7}-\sqrt{3})^n$.

5. Să se deducă care din numerele următoare este mai mare decît 1, și care mai mic decît 1:

a) $\left(\frac{1}{5}\right)^{\sqrt{5}}$; c) $\left(\frac{3}{5}\right)^{\pi}$; e) $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{-\frac{3}{2}}$;

b) $(\sqrt{5})^{\frac{1}{2}}$; d) $(\sqrt{2}-1)^{-\frac{3}{2}}$; f) $\left(\frac{\pi+1}{4}\right)^{-\sqrt{2}}$.

6. Să se afle care număr din perechile de numere următoare este mai mare:

a) $\pi^{-\sqrt{2}}$ și $\left(\frac{1}{\pi}\right)^{-\sqrt{2}}$; c) $\left(\frac{2}{5}\right)^{1+\sqrt{6}}$ și $\left(\frac{2}{5}\right)^{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$;

b) $\left(\frac{\pi}{6}\right)^{1+\sqrt{3}}$ și $\left(\frac{\pi}{6}\right)^2$; d) $(\sqrt{5})^{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ și $(\sqrt{5})^{\sqrt{3}-2}$.

7. Să se afle x astfel încît $a^x > \left(\frac{1}{a}\right)^x$, unde $a > 0$ este un număr real pozitiv.

8. Să se spună dacă sînt echivalente inegalitățile următoare:

a) $a^x > a^4$ și $x > 4$; c) $\left(\frac{1}{9}\right)^x > \left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}$ si $2x < x - 1$;

b) $6^{x^2} < 6^x$ și $x^2 < x$; d) $8^{x^2} < 4$ și $3x^2 \geqslant 2$.

9. Să se traseze graficul funcțiilor $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, unde:

a) $f(x) = 2^{x-2}$; c) $f(x) = 2^{|x|}$; e) $f(x) = 2^x - 2$;

b) $f(x) = 2^{x+2}$; d) $f(x) = 2^{-|x|}$ f) $f(x) = 2^x + 2$.

10. Să se traseze graficul funcțiilor $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, unde:

a) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}$; c) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|x|}$; e) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 1$;

b) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$; d) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-|x|}$; f) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + 1$.

§ Logaritmi

2.1. Definiția logaritmului unui număr pozitiv

Fie $a > 0$ un număr real pozitiv, $a \neq 1$. Considerăm ecuația exponențială

(1) $a^x = N$, $N > 0$.

Din proprietatea 4 (§ 1), pct. 1.3) rezultă că ecuația (1) are o soluție care este unic determinată. Această soluție se notează

(2) $x = \log_a N$

și se numește *logaritmul numărului pozitiv N în baza a.*

Din (1) și (2) obținem egalitatea

(3) $a^{\log_a N} = N$

care *ne arată că logaritmul unui număr real pozitiv este exponentul la care trebuie ridicată baza a ($a > 0$, $a \neq 1$) pentru a obține numărul dat.*

Dacă în (1) facem $x = 1$ obținem $a^1 = a$ și deci

(4) $\log_a a = 1$.

Exemple. 1) Să calculăm $\log_2 32$. Cum $2^5 = 32$, atunci din definiția logaritmului avem $\log_2 32 = 5$.

2) Să determinăm $\log_2 \frac{1}{16}$. Din egalitatea $2^{-4} = \frac{1}{16}$ obținem $\log_2 \frac{1}{16} = -4$.

3) Să determinăm $\log_{\frac{1}{3}} 27$. Să considerăm ecuația exponențială $\left(\frac{1}{3}\right)^x = 27$. Cum $\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} = \frac{1}{3^{-3}} = 27$, obținem $x = -3$ și deci $\log_{\frac{1}{3}} 27 = -3$.

4) Cum $4^4 = 256$ atunci din definiția logaritmului obținem $\log_4 256 = 4$.

Observație. În toate exemplele pe care le-am dat am putut să calculăm logaritmul numerelor date. În general, determinarea logaritmului unui număr oarecare nu se poate face cu exactitate. Cînd vom studia tabelele de logaritmi vom arăta că logaritmul unui număr se poate indica cu o anumită aproximație.

2.2. Funcţia logaritmică

Fie $a > 0$, $a \neq 1$ un număr real. În paragraful precedent definind noţiunea de logaritm în baza a, fiecărui număr pozitiv N i s-a asociat un număr real bine determinat. Acest lucru ne permite să definim o funcţie

$$f : (0, +\infty) \to \mathbf{R}, \ f(x) = \log_a x$$

numită *funcţie logaritmică*.

Iată cîteva proprietăţi ale funcţiei logaritmice:

1° $f(1) = 0$.

Într-adevăr, cum $a^0 = 1$, rezultă că $\log_a 1 = 0$ şi deci $f(1) = 0$.

2° *Funcţia logaritmică este monotonă. Mai exact, dacă $a > 1$, atunci funcţia logaritmică este strict crescătoare, iar dacă $0 < a < 1$, funcţia logaritmică este strict descrescătoare.*

Într-adevăr, să considerăm cazul $a > 1$ şi fie $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ astfel încît $x_1 < x_2$.

Cum $x_1 = a^{\log_a x_1}$ şi $x_2 = a^{\log_a x_2}$, rezultă că $a^{\log_a x_1} < a^{\log_a x_2}$.

Dar funcţia exponenţială fiind crescătoare (a se vedea § 1) obţinem că $\log_a x_1 < \log_a x_2$, adică $f(x_1) < f(x_2)$.

În cazul $0 < a < 1$, din inegalitatea $a^{\log_a x_1} < a^{\log_a x_2}$ şi din faptul că funcţia exponenţială cu baza un număr real $0 < a < 1$ este strict descrescătoare, rezultă că $\log_a x_1 > \log_a x_2$, adică $f(x_1) > f(x_2)$.

3° *Funcţia logaritmică este bijectivă.*

Într-adevăr, dacă $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ astfel încît $f(x_1) = f(x_2)$, atunci $\log_a x_1 = \log_a x_2$. Dar din egalitatea (3) (§ 2) obţinem $x_1 = a^{\log_a x_1}$ şi $x_2 = a^{\log_a x_2}$, adică $x_1 = x_2$. Deci f este o funcţie injectivă.

Fie $y \in \mathbf{R}$, un număr real oarecare. Notăm $x = a^y$. Se vede că $x \in (0, +\infty)$ şi $\log_a x = \log_a a^y = y$. Deci $f(x) = y$ ceea ce ne arată că f este şi surjectivă. Aşadar f este bijectivă.

4°. *Inversa funcţiei logaritmice este funcţia exponenţială.*

Funcţia logaritmică

$$f : (0, +\infty) \to \mathbf{R}, \ f(x) = \log_a x$$

fiind bijectivă, rezultă din § 3.7, cap II, Algebră clasa a IX-a că ea este inversabilă. Inversa sa este funcţia exponenţială

$$g : \mathbf{R} \to (0, +\infty), \ g(x) = a^x.$$

Într-adevăr, dacă $x \in (0, +\infty)$ avem $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\log_a x) = a^{\log_a x} = x$ şi dacă $y \in \mathbf{R}$, atunci $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(a^y) = \log_a a^y = y$.

Graficul funcţiei logaritmice $f(x) = \log_a x$ pentru $a = 2, 5, \frac{1}{2}, \frac{1}{5}$.

Considerăm tabelele de valori

x	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8	16
$\log_2 x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\log_{\frac{1}{2}} x$	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4

x	$\frac{1}{625}$	$\frac{1}{125}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{5}$	1	5	25	125	625
$\log_5 x$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$\log_{\frac{1}{5}} x$	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4

Reprezentăm într-un sistem de axe xOy punctele ale căror coordonate sînt valorile din tabelele de mai sus. Punctele obţinute le unim printr-o linie continuă.

În figura I.3 sînt reprezentate graficele funcţiilor $f(x) = \log_2 x$ şi $g(x) = \log_5 x$, iar în figura I.4 sînt reprezentate graficele funcţiilor $h(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ şi $k(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$.

Deoarece funcţia logaritmică este inversa funcţiei exponenţiale, graficele celor două funcţii sînt simetrice faţă de prima bisectoare. În figura I.5 am reprezentat grafic funcţiile $f(x) = \log_5 x$ şi $g(x) = 5^x$, iar în figura I.6 am reprezentat grafic funcţiile $f(x) = \log_{\frac{1}{5}} x$ şi $g(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$.

Graficul funcţiei logaritmice are următoarele proprietăţi:

1) Trece prin punctul de coordonate (1, 0) de pe axa Ox.

2) Graficul funcţiei logaritmice este constituit dintr-o singură ramură care „urcă" dacă baza $a > 1$ şi „coboară" dacă baza $0 < a < 1$.

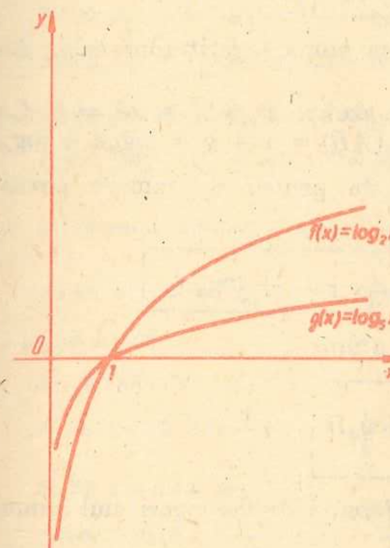


Fig. I. 3

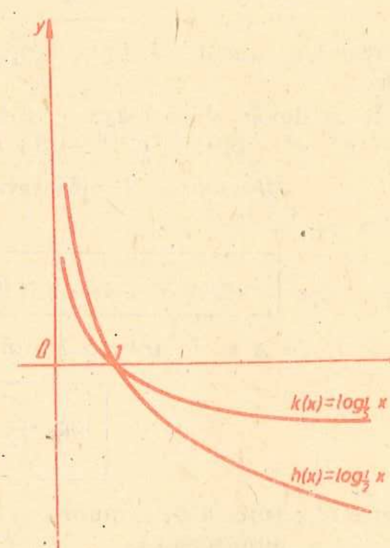


Fig. I. 4

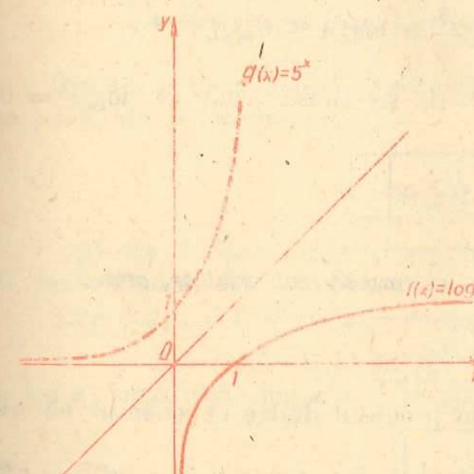


Fig. I. 5

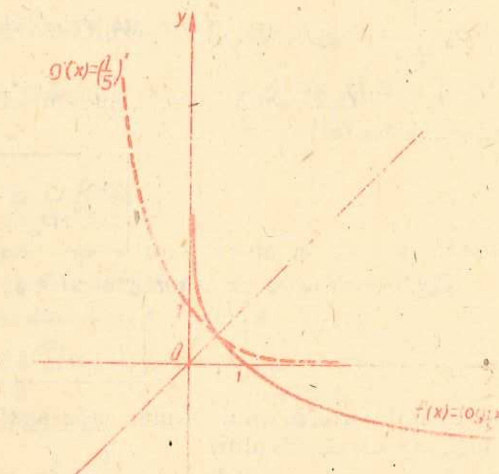


Fig. I. 6

3) Graficul funcției logaritmice este din ce în ce mai „apropiat“ de axele Ox și Oy cu cît a este mai mare, dacă $a > 1$, sau cu cît a este mai mic, dacă $0 < a < 1$.

4) Graficul funcției logaritmice este simetricul graficului funcției exponențiale față de bisectoarea unghiului xOy.

2.3. Proprietățile logaritmilor

Folosind proprietățile puterilor cu exponenți reali obținem următoarele proprietăți pentru logaritmi:

1° *Dacă A și B sînt două numere pozitive, atunci*

$$\boxed{\log_a(AB) = \log_a A + \log_a B}$$

(logaritmul produsului a două numere este egal cu suma logaritmilor celor două numere).

Într-adevăr, dacă $\log_a A = x$ și $\log_a B = y$, atunci $a^x = A$ și $a^y = B$. Cum $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$, obținem $a^{x+y} = A \cdot B$ și deci $\log_a(AB) = x + y = \log_a A + \log_a B$.

Observație. Proprietatea se poate da pentru n numere pozitive $A_1, A_2, \ldots, A_n$ adică

$$\boxed{\log_a(A_1 A_2 \cdots A_n) = \log_a A_1 + \log_a A_2 + \cdots + \log_a A_n}$$

2° *Dacă A și B sînt două numere pozitive, atunci*

$$\boxed{\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B}$$

(logaritmul cîtului a două numere este egal cu diferența dintre logaritmul numărătorului și al numitorului).

Într-adevăr, ținînd cont de proprietatea 1°, avem $\log_a A = \log_a\left(\frac{A}{B} \cdot B\right) = \log_a \frac{A}{B} + \log_a B$, de unde rezultă că $\log_a \frac{A}{B} = \log_a A - \log_a B$.

Observație. Dacă punem $A = 1$ și ținem cont că $\log_a 1 = 0$, obținem egalitatea:

$$\boxed{\log_a \frac{1}{B} = -\log_a B}$$

3° *Dacă A este un număr pozitiv și m un număr real arbitrar, atunci*

$$\boxed{\log_a A^m = m \log_a A}$$

(logaritmul puterii unui număr este egal cu produsul dintre exponentul puterii și logaritmul numărului).

Într-adevăr, dacă $\log_a A = x$, atunci $a^x = A$. Dar atunci $A^m = (a^x)^m = a^{mx}$ și deci $\log_a A^m = mx = m \log_a A$.

4° *Dacă A este un număr pozitiv și n un număr natural ($n \geqslant 2$), atunci*

$$\boxed{\log_a \sqrt[n]{A} = \frac{\log_a A}{n}}$$

(logaritmul unui radical dintr-un număr este egal cu cîtul dintre logaritmul numărului și ordinul radicalului).

Într-adevăr, proprietatea 4° este un caz particular al proprietății 3°, punînd $m = \frac{1}{n}$.

Exemple. 1) Să calculăm $\log_3 75$.

Avem $\log_3 75 = \log_3(3 \cdot 25) = \log_3 3 + \log_3 25 = 1 + \log_3 5^2 = 1 + 2 \log_3 5$.

2) Să calculăm $\log_2 1\,000 - \log_2 125$.

Avem $\log_2 1\,000 - \log_2 125 = \log_2 \frac{1\,000}{125} = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$.

3) Să calcuăm $\log_{10} 0,18 - \log_{10} 180$.

Avem $\log_{10} 0,18 - \log_{10} 180 = \log_{10} \frac{0,18}{180} = \log_{10} \frac{1}{1\,000} = \log_{10} 10^{-3} = -3$.

4) Să calculăm $\log_6 \frac{1}{18} + \log_6 \frac{1}{12}$.

Avem $\log_6 \frac{1}{18} + \log_6 \frac{1}{12} = -\log_6 18 - \log_6 12 = -(\log_6 18 + \log_6 12) = -\log_6(18 \cdot 12) = -\log_6 6^3 = -3$.

5) Să calculăm $\log_2 \sqrt[4]{8}$.

Avem $\log_2 \sqrt[4]{8} = \frac{1}{4} \log_2 8 = \frac{1}{4} \log_2 2^3 = \frac{3}{4} \log_2 2 = \frac{3}{4}$.

5) Să calculăm $\log_2 \sqrt[5]{81}$.

Avem $\log_2 \sqrt[5]{81} = \frac{1}{5} \log_2 81 = \frac{1}{5} \log_2 3^4 = \frac{4}{5} \log_2 3$.

2.4. Schimbarea bazei logaritmului aceluiași număr

Dacă a și b sînt două numere pozitive diferite de 1, iar A un număr pozitiv oarecare, are loc egalitatea:

$$\boxed{\log_a A = \log_b A \cdot \log_a b}$$

Într-adevăr, dacă $\log_a A = x$ și $\log_b A = y$, atunci avem $a^x = A$ și $b^y = A$ de unde obținem $a^x = b^y$. Dar atunci $\log_a a^x = \log_a b^y$ sau $x \log_a a = y \log_a b$. Cum $\log_a a = 1$, avem $x = y \log_a b$, adică $\log_a A = \log_b A \cdot \log_a b$.

Observație. Dacă în egalitatea de mai sus $A = a$, obținem $\log_a a = \log_b a \cdot \log_a b$. Cum $\log_a a = 1$, rezultă că:

$$\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$$

Exemple. 1) Să se scrie $\log_2 x$ în funcție de $\log_4 x$.

Avem $\log_2 x = \log_4 x \cdot \log_2 4 = 2\log_4 x$.

2) Să se arate că expresia $E = \dfrac{\log_2 x}{\log_5 x}$ nu depinde de x.

Într-adevăr, $E = \dfrac{\log_2 x}{\log_2 x \cdot \log_5 2} = \dfrac{1}{\log_5 2} = \log_2 5$.

3) Să se arate că $\log_2 6 + \log_6 2 > 2$.

Avem $\log_2 6 + \log_6 2 = \log_2 6 + \dfrac{1}{\log_2 6}$. Deci trebuie să arătăm că $\log_2 6 + \dfrac{1}{\log_2 6} > 2$, sau $(\log_2 6)^2 - 2\log_2 6 + 1 > 0$, sau încă $(\log_2 6 - 1)^2 > 0$, inegalitate evidentă deoarece $\log_2 6 \neq 1$.

2.5. Operația de logaritmare a unei expresii

De multe ori în practică sîntem puși în situația să determinăm valoarea aproximativă a unui număr dat printr-o expresie în care apar radicali de ordin foarte mare. De exemplu, să considerăm numărul:

$$x = \frac{17^3\sqrt[4]{131}\cdot\sqrt[3]{92}}{\sqrt[5]{37\cdot 98\cdot 23}} \qquad (1)$$

și vrem să determinăm o valoare aproximativă a numărului x. Vom logaritma expresia (1) într-o anumită bază convenabilă a. Folosind proprietățile logaritmilor obținem:

$$\log_a x = \log_a\left(17^3\sqrt[4]{131}\sqrt[3]{92}\right) - \log_a\sqrt[5]{37\cdot 98\cdot 23} = \log_a 17^3 + \log_a\sqrt[4]{131} +$$

$$+\log_a\sqrt[3]{92} - \frac{\log_a(37\cdot 98\cdot 23)}{5} = 3\log_a 17 + \frac{1}{4}\log_a 131 + \frac{1}{3}\log_a 92 -$$

$$-\frac{1}{5}\log_a 37 - \frac{1}{5}\log_a 98 - \frac{1}{5}\log_a 23.$$

Deci am obținut egalitatea:

$$\log_a x = 3\log_a 17 + \frac{1}{4}\log_a 131 + \frac{1}{3}\log_a 92 - \frac{1}{5}\log_a 37 - \frac{1}{5}\log_a 98 - \frac{1}{5}\log_a 23. \qquad (2)$$

Utilizînd tabelele de logaritmi (a se vedea § 3) din egalitatea (2) putem să determinăm o valoare aproximativă pentru x.

În general, dacă E este o expresie algebrică în care apar produse de puteri și radicali, putem să-i asociem, exact ca în exemplu (1), o expresie, notată $\log E$, în care apar sume (diferențe) de logaritmi înmulțite eventual cu anumite numere raționale. Operația prin care expresiei E i se asociază expresia $\log E$ se numește „operație de logaritmare".

Exemple: 1) Fie $E = a^2\sqrt[7]{ab^6}$.

Prin operația de logaritmare obținem:

$$\log_c E = \log_c\left(a^2\sqrt[7]{ab^6}\right) = \log_c a^2 + \log_c\sqrt[7]{ab^6} = 2\log_c a + \frac{1}{7}\log_c a + \frac{6}{7}\log_c b.$$

2) Fie $E = \sqrt[4]{\dfrac{a^3}{b^5}}$. Prin operația de logaritmare obținem expresia

$$\log_c E = \log_c\sqrt[4]{\frac{a^3}{b^5}} = \frac{1}{4}\log_c\frac{a^3}{b^5} = \frac{1}{4}(\log_c a^3 - \log_c b^5) = \frac{3}{4}\log_c a - \frac{5}{4}\log_c b.$$

Observație. Adesea în calcule este nevoie să se facă și operația inversă, adică unei expresii în care intervin logaritmi să-i asociem o expresie fără logaritmi.

De exemplu, fie expresia

$$\log_c x = 2\log_c a - \frac{1}{2}\log_c b - 3\log_c 3$$

Folosind proprietățile logaritmilor avem:

$$\log_c x = \log_c a^2 - \log_c\sqrt{b} - \log_c 3^3 = \log_c\frac{a^2}{\sqrt{b}\cdot 3^3} = \log_c\frac{a^2}{27\sqrt{b}},$$

de unde obținem că $x = \dfrac{a^2}{27\sqrt{b}}$.

Exerciții

1. Să se determine valorile lui x pentru ca următorii logaritmi să aibă sens:

a) $\log_2(1-x)$; b) $\log_2(1-x^2)$; c) $\log_{\frac{1}{2}}(1+x^2)$;

d) $\log_4(x^2+x-2)$; e) $\log_3(-x^2+5x-6)$; f) $\log_5(x^2-x+1)$;

g) $\log_4(\log_2 x)$; h) $\log_{\frac{1}{2}}(\log_3 x)$; i) $\log_{\frac{1}{2}}(\log_{\frac{1}{2}} x)$.

2. Care din următoarele numere este mai mare?

a) $\log_2 4$ sau $\log_2 5$; b) 2 sau $\log_3 10$;

c) $\log_6\dfrac{1}{2}$ sau $\log_5\dfrac{1}{7}$; d) 3 sau $\log_2 7$.

3. Pentru ce valori ale lui x au loc inegalitățile:

a) $\log_3 x > \log_3 4$; b) $\log_{\frac{1}{2}}(2x) \geqslant \log_{\frac{1}{2}} 5$;

c) $\log_2 x^2 \geqslant \log_2 8$; d) $\log_6(x^2-1) \leqslant \log_6(4x+4)$.

4. Pornind de la graficul funcției logaritmice să se construiască graficele următoarelor funcții:

a) $f:(-1, +\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x) = \log_2(1+x)$;

b) $f:(0, +\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x) = \log_2 x^3$;

c) $f:(1, +\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x) = \log_5(x-1)$;

d) $f:\mathbf{R}\setminus\{0\}\to\mathbf{R}$, $f(x) = \log_5 x^2$;

e) $f:(2, +\infty)\to\mathbf{R}$, $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$;

f) $f:\mathbf{R}\setminus\{3\}\to\mathbf{R}$, $f(x) = \log_6|x-3|$.

5. Să se calculeze:

a) $\log_2 5 + \log_2\dfrac{4}{5}$; b) $\log_{12} 2 + \log_{12} 72$:

c) $\log_5 1\,000 - \log_5 40$: d) $\log_6 7 - \log_6\dfrac{7}{36}$;

e) $\log_{0,1} 50 - \log_{0,1} 0,5$: f) $\log_4 6 + \log_4 8 - \log_4 3$:

g) $\log_{\frac{1}{2}} 3 - \log_{\frac{1}{2}} 12 + \log_{\frac{1}{2}} 2$: h) $\log_{0,1} 5 + \log_{0,1} 4 - \log_{0,1} 2$.

6. Știind că $\log_{10}7 \approx 0{,}84510$ și $\log_{10}5 \approx 0{,}69897$ să se calculeze:

a) $\log_{10}0{,}7$; b) $\log_{10}\sqrt[3]{7}$; c) $\log_{10}35$; d) $\log_{10}175$; e) $\log_{10}7\sqrt{5}$.

7. Să se arate că expresiile:

a) $E = \dfrac{\log_7 x^2}{\log_8 x^2}$; b) $E = \dfrac{\log_2 x + \log_2\sqrt{x}}{\log_3 x + \log_3\sqrt{x}}$; c) $E = \dfrac{\log_x\sqrt{7}}{\log_x 7}$ nu depind de x.

8. Să se logaritmeze expresiile:

a) $E = 41^2\sqrt[13]{41 \cdot 37^5}$; b) $E = \dfrac{31^3\sqrt[7]{41 \cdot 33^4}}{17^2\sqrt[3]{23^2 \cdot 29}}$; c) $E = a^2\sqrt[5]{ab^3c}$; d) $E = 23a^3\sqrt[3]{b^2a^5}$;

e) $E = \sqrt[6]{\left(\dfrac{a}{5b}\right)^7}$; f) $E = \left(\sqrt{\dfrac{a^3}{2b}}\right)^3$; g) $E = \dfrac{21}{4}\sqrt[5]{a\sqrt[3]{a}}$; h) $E = \dfrac{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a}}}}}{b\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{a\sqrt{b}}}}}$;

i) $E = \dfrac{2(a-b)}{3(a+b)}\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}$; j) $E = \dfrac{\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt{a}}}}{\sqrt{a\sqrt[3]{a\sqrt[4]{a}}}}$.

9. Să se determine expresia lui x astfel încît să avem:

a) $\log_a x = \log_a 3 + \log_a 4 - \log_a 5$; b) $\log_a x = 2\log_a 7 + 3\log_a 6 - 4\log_a 5$;

c) $\log_2 x = 2\log_2 a + 3\log_2(a+b) - 4\log_2(a-b)$; d) $\log_4 x = -\dfrac{1}{2}\log_4(a+b) +$

$+\dfrac{1}{4}\left[\log_4(a-b) - \dfrac{2}{3}\log_4(a+b) + \dfrac{2}{3}\log_4(2b) - \dfrac{1}{2}\log_4(2a)\right]$.

§ 3. Logaritmi zecimali

3.1. Logaritmi zecimali și proprietățile lor

Definiția 3.1.1. **Dacă a este un număr real, se numește *partea întreagă a lui a*, cel mai mare număr întreg care este cel mult egal cu a.**

Partea întreagă a lui a se notează cu $[a]$. Conform definiției avem $[a] \in \mathbb{Z}$ și $[a] \leqslant a$; dacă $[a] \leqslant n \leqslant a$, $n \in \mathbb{Z}$, atunci $n = [a]$. Altfel spus, partea întreagă a lui a este un număr întreg n, cu proprietatea $n \leqslant a < n + 1$. Deoarece oricare ar fi numărul real a, în intervalul $(a - 1, a]$ există un număr întreg și numai unul, rezultă că $a - 1 < [a] \leqslant a$.

De *exemplu:* $[3, 2] = 3$; $[0{,}245] = 0$; $[6] = 6$; partea întreagă a numărului $-4{,}7$ este -5, deoarece $-5 < -4{,}7 < -4$. Analog se obține: $[-5{,}791] = -6$; $[-0{,}231] = -1$, $[-\pi] = [-3{,}141...] = -4$.

Se observă că dacă a este un număr real oarecare și n este întreg, atunci $[a + n] = [a] + n$.

Definiția 3.1.2. **Diferența dintre numărul a și partea sa întreagă $[a]$ se numește *partea fracționară* a lui a și se notează cu $\{a\}$.**

Deci $\{a\} = a - [a]$. Deoarece $[a] \leqslant a < [a] + 1$, rezultă că $0 \leqslant \{a\} < 1$.

De *exemplu:* $\{2{,}4\} = 2{,}4 - 2 = 0{,}4$; $\{0{,}261\} = 0{,}261 - 0 = 0{,}261$; $\{-6{,}81\} = -6{,}81 - (-7) = 0{,}19$; $\{-0{,}231\} = -0{,}231 - (-1) = 0{,}769$.

Orice număr real a este suma dintre partea sa întreagă și partea sa fracționară: $a = [a] + \{a\}$.

Se observă că dacă numărul real a are scrierea ca fracție zecimală $a = a_0, a_1a_2a_3...$, cu $a_0 \in \mathbb{Z}$ și a_1, a_2, a_3..., sînt numere naturale cuprinse între 0 și 9 atunci

$$[a] = \begin{cases} a_0, & \text{dacă } a \geqslant 0 \text{ sau } a \in \mathbb{Z}, \\ a_0 - 1, & \text{dacă } a < 0 \text{ și } a \notin \mathbb{Z}, \end{cases}$$

$$\text{iar } \{a\} = \begin{cases} 0,a_1a_2a_3 ..., & \text{dacă } a \geqslant 0 \text{ sau } a \in \mathbb{Z}, \\ 1 - 0,a_1a_2a_3 ..., & \text{dacă } a < 0 \text{ și } a \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Dacă $a < 0$, $a \notin \mathbb{Z}$ și $|[a]| = b_0$, $\{a\} = 0,b_1b_2b_3 ...$, atunci vom scrie numărul a în următoarea formă:

$$a = \bar{b}_0,b_1b_2b_3 \ldots .$$

De *exemplu,* $-4{,}3 = [-4{,}3] + \{-4{,}3\} = -5 + 0{,}7 = \bar{5},7$.

În practică se folosesc logaritmii în bază zece care se mai numesc și logaritmi zecimali. Aceștia se notează cu lg, în loc de log; de aceea nu mai este nevoie să se specifice baza. Astfel, vom scrie lg 101 în loc de $\log_{10}101$ și lg 5 în loc de $\log_{10}5$ ș.a.m.d.

Logaritmii zecimali au toate proprietățile pe care le au logaritmii în bază supraunitară. Astfel, logaritmul zecimal al unui număr mai mare decît 1 este pozitiv, iar logaritmul zecimal al unui număr mai mic decît 1 este negativ. Dacă două numere pozitive sînt într-o anumită ordine, atunci logaritmii lor zecimali sînt în aceeași ordine. Dacă α este un număr real oarecare și a este pozitiv, atunci $\lg a^\alpha = \alpha \lg a$. Dacă a și b sînt pozitive, atunci $\lg ab = \lg a + \lg b$. În particular dacă $a = 10^n$, atunci $\lg 10^n = n$ și $\lg 10^n \cdot b = n + \lg b$.

De *exemplu:* $\lg 10\sqrt{10} = \lg 10^{\frac{3}{2}} = \dfrac{3}{2}$; $\lg 10\,000 = \lg 10^4 = 4$; $\lg 100 = \lg 10^2 = 2$; $\lg 0{,}001 = \lg 10^{-3} = -3$; $\lg 56{,}81 = \lg 5681 \cdot 10^{-2} = -2 + \lg 5681$.

Din aceste proprietăți generale, deducem următoarele *proprietăți ale logaritmului zecimal*:

1° Logaritmul unui număr care scris în baza zece este de forma 1 urmat de n zerouri, este egal cu n; adică, dacă $a = 1\underbrace{00 \ldots 0}_{n}$, atunci $\lg a = n$.

2° Logaritmul unui număr subunitar care scris în baza zece are după virgulă n cifre de zero urmate de cifra 1, este egal cu $-n - 1$; adică pentru $a = 0,\underbrace{00 \ldots 0}_{n}1$, avem $\lg a = \lg 10^{-n-1} = -n - 1$.

3° Dacă $10^n < a < 10^{n+1}$, atunci $\lg 10^n < \lg a < \lg 10^{n+1}$ și deci $n < \lg a < n + 1$.

De *exemplu:* dacă $a = 87{,}23$, atunci $10 < 87{,}23 < 100$ și deci $1 < \lg a < 2$.

Deducem că logaritmul oricărui număr care nu este egal cu o putere întreagă a lui 10, este un număr zecimal (nu este număr întreg).

Definiția 3.1.3. **Dacă a este un număr pozitiv vom numi *caracteristica logaritmului său zecimal*, numărul întreg $[\lg a]$; vom numi *mantisa logaritmului lui a* numărul $\{\lg a\}$.**

Prin urmare avem $\lg a = [\lg a] + \{\lg a\}$. Caracteristica logaritmului lui a este cel mai mare număr întreg n cu proprietatea că $10^n \leqslant a$. Mai precis, caracteristica lui $\lg a$ este un număr întreg n, cu proprietatea că $10^n \leqslant a < 10^{n+1}$.

De *exemplu*, caracteristica lui lg 87,23 este 1; dacă $a = 4573$, atunci $1\,000 \leqslant a < 10\,000$, $3 < \lg 4573 < 4$, prin urmare caracteristica lui lg 4573 este 3: dacă $a = 0{,}0123$, atunci $10^{-2} < a < 10^{-1}$ şi deci caracteristica logaritmului său este -2.

Din cele de mai sus rezultă următoarele două reguli de calculare a caracteristicii logaritmului zecimal al unui număr a:

i) *Dacă un număr supraunitar scris în formă zecimală are n cifre la stînga virgulei (adică la partea sa întreagă), atunci caracteristica logaritmului său este* $n - 1$.

ii) *Caracteristica unui număr subunitar scris în formă zecimală se obţine în felul următor: se ia numărul de zerouri situate la stînga primei cifre diferite de zero (inclusiv zeroul din stînga virgulei), numărul natural astfel obţinut fiind luat cu semnul minus.*

De *exemplu*, dacă $a = 0{,}57$, atunci $[\lg 0{,}57] = -1$; dacă $a = 0{,}0012$, $[\lg a] = -3$.

4° Dacă înmulţim un număr întreg a cu o putere întreagă a lui 10, atunci caracteristica logaritmului numărului astfel obţinut se obţine din caracteristica logaritmului lui a, la care se adaugă exponentul lui 10. Într-adevăr, avem $[\lg 10^n \cdot a] = [n + \lg a] = n + [\lg a]$. De *exemplu*, dacă înmulţim pe a cu 10, 100, 1000 etc., atunci caracteristica numărului obţinut creşte cu o unitate, cu două, cu trei etc.; dacă împărţim pe a cu 10, 100, 1000 etc., caracteristica scade cu 1, cu 2, cu 3 etc.

5° Mantisa logaritmului unui număr a nu se modifică, dacă înmulţim pe a cu o putere întreagă a lui 10. Într-adevăr, avem

$$\{\lg 10^n a\} = \lg 10^n \cdot a - [\lg 10^n \cdot a] = n + \lg a - [n + \lg a] =$$

$$= n + \lg a - n - [\lg a] = \lg a - [\lg a] = \{\lg a\}.$$

Cu ajutorul regulilor enumerate pînă acum, deducem că dificultatea aflării logaritmului unui număr constă în calcularea mantisei. Aceasta se află cu ajutorul tabelelor de logaritmi.

3.2. Tabele de logaritmi cu 5 zecimale

Cu ajutorul acestor tabele se pot afla mantisele logaritmilor numerelor de la 1 la 9999, cu o aproximaţie de 0,00001. Această aproximaţie este în general suficient de bună pentru calculele din practică. Pe prima pagină a tabelelor sînt scrise mantisele logaritmilor de la 1 pînă la 100; în coloana cu indicatorul N sînt scrise numerele, iar în dreapta lor, în coloana lg, se află mantisele respective.

Celelalte pagini sînt aranjate în felul următor: în coloana întîi cu indicativul N, sînt scrise numerele de la 100 la 9999 şi urmează apoi zece coloane cu indicativul 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 în care sînt scrise mantisele logaritmilor numerelor cu patru cifre.

Pentru a afla mantisa logaritmului numărului cu patru cifre $n = a_1a_2a_3a_4$, se procedează astfel: se caută în coloana N numărul $a_1a_2a_3$, obţinut prin tăierea cifrei unităţilor în numărul n (dacă n are trei cifre, se caută în coloana N chiar numărul n), apoi fixăm coloana cu indicativul a_4; luăm primele două cifre ale mantisei logaritmului lui $a_1a_2a_3$ din coloana 0, apoi la intersecţia liniei orizontale

a lui $a_1a_2a_3$ cu coloana a_4 se găsesc restul de trei cifre ale mantisei (dacă n are doar trei cifre vom căuta logaritmul său în coloana 0).

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
300	47 712	727	741	756	700	784	799	813	828	842
301	857	871	885	900	914	929	943	958	972	986
302	48 001	015	029	044	058	073	087	101	116	130
303	144	159	173	187	202	216	230	244	259	273
304	287	302	316	330	344	359	373	387	401	416
305	430	444	458	473	487	501	515	530	544	558
306	572	586	601	615	629	643	657	671	686	700
307	714	728	742	756	770	785	799	813	827	841
308	855	869	883	897	911	926	940	954	968	982
309	996	*010	*024	*038	*052	*066	*080	*094	*108	*122
310	49 136	150	164	178	192	206	220	234	248	262
311	276	290	304	318	332	346	360	374	388	402
312	415	429	443	457	471	485	499	513	527	541
313	554	568	583	596	610	624	638	651	665	679
314	693	707	721	734	748	762	766	790	803	817
315	831	845	859	872	886	900	914	927	941	955
316	969	982	996	*010	*024	*037	*051	*065	*079	*092
317	50 106	120	133	147	161	174	188	202	215	229
318	243	256	270	284	297	311	325	338	352	365
319	379	393	406	420	433	447	461	474	488	501

Exemple. 1) Dacă vom căuta în tabele lg 3153 procedăm în felul următor: deoarece 3153 are 4 cifre, caracteristica sa este 3 iar pentru a afla mantisa, căutăm în coloana N numărul 315. La intersecţia liniei corespunzătoare acestui număr cu coloana 3, vom găsi numărul 49872, deci

$$\lg 3153 \approx 3{,}49872.$$

2) Să aflăm logaritmul lui 1,25. Deoarece 1,25 are o singură cifră nenulă la stînga virgulei, caracteristica logaritmului său este 0 (conform unor proprietăţi stabilite). Mantisa este aceeaşi cu a numărului 125 din coloana N a tabelelor; deci obţinem

$$\lg 1{,}25 \approx 0{,}09691.$$

3) Logaritmul numărului 81,13 are caracteristica 1, iar mantisa aceeaşi cu a numărului 8113 pe care o găsim în tabele. Obţinem astfel

$$\lg 81{,}13 \approx 1{,}90918.$$

4) Logaritmul numărului 0,0003145 are caracteristica -4, iar în tabele vom găsi mantisa lui în dreptul numărului 314, în coloana 5. Obţinem astfel

$$\lg 0{,}0003145 \approx \bar{4}{,}49762.$$

Logaritmul unui număr cu cinci zecimale. Să aflăm de *exemplu* lg 32437 cu aproximaţie cît mai bună. Procedăm astfel: caracteristica este 4, iar mantisa este aceeaşi ca pentru lg 3243,7. Observăm că 3243,7 este cuprins între 3243 şi 3244, deci lg 3243,7 este cuprins între lg 3243 şi lg 3244. Să admitem că pe porţiunea dintre 3243 şi 3244 logaritmul este proporţional cu creşterea numerelor. Din tabele obţinem:

$$\lg 3243 \approx 3{,}51095,$$

$$\lg 3244 \approx 3{,}51108$$

şi rezultă că pentru o creştere a numărului cu 1, logaritmul se măreşte cu $0,00013 = 13 \cdot 10^{-5}$. Deci, dacă numărul creşte de la 3243 la 3243,7, adică cu 0,7, logaritmul său va creşte cu $13 \cdot 10^{-5} \times 0,7 = 9,1 \cdot 10^{-5} = 0,000091$. Deoarece lucrăm numai cu 5 zecimale, rotunjim pe 0,000091 la 0,00009 şi vom avea

$$\lg 3243,7 \approx 4,51095 + 0,00009 = 4,51104.$$

În practică este comod să fie aşezate calculele de mai sus în felul următor:

$\lg 3243 = 3,51095$
$\lg 3244 = 3,51108$

13

1 13
0,7 .... $13 \times 0,7 = 9,1 \approx 9$
$\lg 32437 \approx 4,51095 + 0,00009 = 4,51104.$

Operaţia prin care am aflat logaritmul de mai sus se numeşte interpolare. Ea oferă posibilitatea unui calcul *aproximativ*, cu eroare destul de mică, pentru aflarea mantisei logaritmului unui număr cu cinci sau mai multe cifre. În realitate *creşterile logaritmilor nu sînt proporţionale cu creşterile numerelor*, deoarece, de *exemplu*, $\lg 10 = 1$; $\lg 100 = 2$ şi prin urmare logaritmul s-a mărit de 2 ori în timp ce numărul s-a mărit de 10 ori. Cînd însă creşterile sînt mici, putem să considerăm creşterea logaritmilor aproximativ proporţională cu creşterea numerelor.

Aflarea unui număr căruia i se cunoaşte logaritmul.

Considerăm de *exemplu* problema următoare: să se afle numărul x ştiind că $\lg x = 3,49982$. Să căutăm mai întîi un număr a cărui mantisă a logaritmului să fie 0,49982. Pentru aceasta căutăm în coloana 0 a tabelelor de logaritmi, primul număr care începe cu cifrele 49, apoi urmărim în jos pe această coloană pînă ajungem la cel mai mare număr, mai mic decît 49982. Acesta este 49969. Urmărim apoi pe linia corespunzătoare acestuia pînă găsim numărul 49982 sau un număr cît mai apropiat de acesta. În cazul nostru găsim numărul 49982 în coloana 1, deci numărul căutat este un număr de forma $a_1a_2a_3a_4$, în care numărul $a_1a_2a_3$ este în coloana N, în aceeaşi linie cu mantisa 49982, iar a_4 este indicativul coloanei în care se găseşte 49982, în cazul nostru $a_4 = 1$. Obţinem numărul 3161. Deoarece numărul $\lg x$ are caracteristica 3, rezultă că x are 4 cifre în stînga virgulei, deci $x \approx 3161$.

Procedeul descris ne ajută la calcularea puterilor lui 10, deoarece egalitatea $\lg x = 1$ este echivalentă cu $x = 10$. Prin urmare calculul lui x revine la aflarea lui 10^α, unde α este numărul dat. Ca şi aflarea logaritmului cu ajutorul tabelelor, acesta este un calcul *aproximativ*. Dacă numărul dat $\lg x$ nu se află în tabele, se procedează la interpolare, ca în cazul operaţiei inverse, de aflare a mantisei lui $\lg x$ cînd se cunoaşte x.

3.3. Operaţii cu logaritmi

Tabelele de logaritmi zecimali se pot întrebuinţa la efectuarea mai rapidă a unor calcule numerice complicate. Astfel proprietăţile următoare:

1° $\lg xy = \lg x + \lg y$;

2° $\lg \dfrac{x}{y} = \lg x - \lg y$;

3° $\lg x^n = n \lg x$;

4° $\lg \sqrt[n]{x} = \dfrac{\lg x}{n}$;

5° $\log_a x = \dfrac{\lg x}{\lg a}$,

ne permit ca în loc de o înmulţire să efectuăm o adunare, în loc de o împărţire să efectuăm o diferenţă, în loc de ridicare la putere să efectuăm o înmulţire, în loc de extragere de radical să efectuăm o împărţire. Proprietatea 5° reduce calcularea logaritmilor într-o bază oarecare la calcularea unor logaritmi zecimali.

Practic, trebuie să ştim deci să adunăm, să scădem, să înmulţim, sau să împărţim numere scrise sub forma

$$n + \varepsilon, \text{ cu } n \in \mathbb{Z} \text{ şi } 0 < \varepsilon < 1,$$

unde n reprezintă caracteristica, iar ε mantisa unui anumit logaritm.

Adunarea. Pentru a efectua adunarea mai multor logaritmi procedăm la fel ca la adunarea numerelor zecimale, ţinînd cont însă de unităţile care pot apărea la adunarea mantiselor; acestea se adaugă la caracteristică.

Exemple. 1) Să efectuăm adunarea:

$$\lg 3452 + \lg 253 + \lg 1,439.$$

În tabele găsim:

$\lg 3452 \approx 3,53807$;
$\lg 253 \approx 2,40312$;
$\lg 1,439 \approx 0,15806$.

Vom obţine:

3,53807 +
2,40312
0,15806

6,09925

2) Să efectuăm adunarea

$$\lg 345 + \lg 0,98 + \lg 75,43 + \lg 0,029.$$

Căutînd în tabele, rezultă următoarea adunare:

$2,53782 +$
$\bar{1},99123$
$1,87754$
$\bar{2},46240$

$2,86899$

Scăderea. Scăderea se poate reduce la o adunare, ţinînd cont că pentru un număr scris sub forma $n + \varepsilon$ cu $n \in \mathbb{Z}$ şi $0 < \varepsilon < 1$, avem $-(n + \varepsilon) = (-n - 1) + (1 - \varepsilon)$.

Exemplu. Să aflăm $\lg \dfrac{345}{5933}$.

Avem $\lg \dfrac{345}{5933} = \lg 345 - \lg 5933 \approx 2,53782 - 3,77327 = 2,53782 + \bar{4},22673 = \bar{2},76455$.

Înmulţirea cu un număr întreg. Pentru a înmulţi un logaritm cu un număr întreg, înmulţim separat mantisa şi separat caracteristica cu acel număr, adăugînd la caracteristică unităţile pozitive ce rezultă de la înmulţirea mantisei.

Exemple. 1) Să se calculeze $\lg (312,6)^8$.

Avem: $\lg (312,6)^8 = 8 \lg 312,6 \approx 8 \cdot 2,49499 = 19,95992$.

2) $\lg (0,0074)^6 = 6 \lg 0,0074 \approx 6 \cdot \bar{3},86923 = -18 + 6 \cdot 0,86923 = \overline{13},21538$.

Împărțirea cu un număr natural nenul. Această operație apare în calcularea unor logaritmi de tipul: $\lg\sqrt[n]{a} = \frac{\lg a}{n}$. Vom da trei exemple din care vor rezulta cazurile ce se pot ivi în astfel de situații.

Exemple: 1) Să se calculeze $\lg\sqrt[3]{520}$.

Obținem $\lg\sqrt[3]{520} = \frac{\lg 520}{3} \approx \frac{2,71600}{3} \approx 0,90533$.

În acest caz, caracteristica logaritmului lui 520 fiind pozitivă, nu am avut nici o dificultate, împărțirea efectuîndu-se în mod obișnuit.

2) Să se calculeze $\lg\sqrt[3]{0,00786}$.

Avem $\lg\sqrt[3]{0,00786} = \frac{\lg 0,00786}{3} \approx \frac{\overline{3},89542}{3} = \frac{-3+0,89542}{3} = -1 + 0,29847 = \overline{1},29847$.

În acest caz caracteristica este negativă, dar ea împărțindu-se exact la împărțitorul dat 3, am putut afla caracteristica cîtului și apoi mantisa lui, efectuînd împărțirile separat.

3) Să se calculeze $\lg\sqrt[5]{0,0458}$.

Obținem $\lg\sqrt[5]{0,0458} = \frac{\lg 0,0458}{5} \approx \frac{\overline{2},66087}{5} = \frac{-2-3+3+0,66087}{5} =$

$= \frac{-5+3,66087}{5} = \frac{-5}{5} + \frac{3,66087}{5} = -1 + 0,73217 = \overline{1},73217$.

Observăm că am redus în acest caz problema la o situație similară cu cea din exemplul 2). Pentru aceasta am scăzut și am adunat 3, astfel încît caracteristica să se împartă exact la numitorul 5, mantisa obținîndu-se prin împărțirea lui 3,66087 la 5. Deci în cazul în care caracteristica este negativă și nu este divizibilă la împărțitor, se scade un număr de unități pînă ce ea devine multiplu al împărțitorului și se efectuează împărțirea $\left(\text{în cazul de mai sus } \frac{-5}{5} = -1\right)$. În același timp se adaugă același număr de unități mantisei, numărul astfel obținut împărțindu-se separat la numitorul comun (în cazul nostru 5). Din prima împărțire rezultă caracteristica, iar din a doua, mantisa numărului cerut.

Împărțirea logaritmilor. În cazul ecuațiilor de forma $a^x = b$, a, $b > 0$, $a \neq 1$, apare problema împărțirii a doi logaritmi, deoarece egalitatea $a^x = b$ este echivalentă pe rînd cu egalitățile:

$$\lg a^x = \lg b,$$

$$x \lg a = \lg b,$$

$$x = \frac{\lg b}{\lg a}.$$

În astfel de situații este preferabil să se scrie atît $\lg a$ cît și $\lg b$ sub forma zecimală obișnuită (deci cu semn în față) și să se efectueze împărțirea în mod obișnuit.

Exemplu:

$$\frac{\lg 0,458}{\lg 65} \approx \frac{\overline{1},66087}{1,81291} = \frac{-1+0,66087}{1,81291} = -\frac{0,33913}{1,81291} \approx -0,18707.$$

Efectuarea unor calcule numerice complicate cu ajutorul logaritmilor. Folosind proprietățile logaritmilor și utilizînd tabelele de logaritmi, se pot înlocui calculele lungi și dificile, cu calcule simple de tipul sumei și diferenței, sau de multiplicare și împărțire cu numere naturale.

Exemple. 1) Să se calculeze $\sqrt[3]{125 \cdot 4593}$. Vom proceda în acest caz, ca și în cele ce urmează în felul următor: notăm cu x numărul care trebuie aflat, calculăm întîi $\lg x$, cu ajutorul tabelelor și calculelor învățate, apoi aflăm din tabele numărul x al cărui logaritm îl cunoaștem.

Astfel avem în exemplul de mai sus:

$$\lg x = \frac{\lg 125 + \lg 4593}{3} = \frac{2,09691 + 3,66210}{3} = \frac{5,75901}{3} = 1,91967.$$

Căutăm apoi în tabele numărul al cărui logaritm are mantisa 0,91967. Obținem numărul din patru cifre 8311 și ținînd cont că $\lg x$ are caracteristica 1, deducem că x are două cifre la stînga virgulei, deci:

$$x \approx 83,11.$$

2) Să se calculeze $x = \sqrt[5]{\sqrt[4]{35} - \sqrt[6]{30}}$.

Vom calcula mai întîi $y_1 = \sqrt[4]{35}$ și $y_2 = \sqrt[6]{30}$. Astfel obținem $\lg y_1 = \frac{\lg 35}{4} \approx$ $\approx \frac{1,54407}{4} \approx 0,38602$. Căutînd în tabele numărul cu mantisa 0,38602, obținem $y_1 \approx 2,432$.

Analog obținem $\lg y_2 = \frac{\lg 30}{6} \approx \frac{1,47712}{6} \approx 0,24619$ și deci $y_2 = 1,763$. Prin urmare $\sqrt[4]{35} - \sqrt[6]{30} \approx 0,669$.

În final avem că

$$\lg x \approx \lg\sqrt[5]{0,669} = \frac{\lg 0,669}{5} \approx \frac{\overline{1},82543}{5} = \frac{-1+0,82543}{5} = \frac{-5+4,82543}{5} = \overline{1},96509.$$

Căutînd în tabele și ținînd cont că x are o singură cifră de zero în stînga virgulei (caracteristica lui $\lg x$ fiind -1) rezultă că $x \approx 0,9228$.

Logaritmi naturali

În matematica superioară, apar foarte des logaritmi care au ca bază numărul irațional, notat cu e, e = 2,718281828... . Folosirea acestor logaritmi permite simplificarea multor formule matematice. Logaritmii în baza e apar în rezolvarea unor probleme fizice și intră în mod natural în descrierea matematică a unor procese chimice, biologice ș.a. Logaritmul natural al numărului a se notează $\ln a$.

Exerciții

1. Să se calculeze caracteristica logaritmilor zecimali ai numerelor: 2; 57,38; 632,7; 5237,81: 0,024; 0,99: 0,0003; 54; 231,002.

2. Știind că $\lg 2 \approx 0,301$ și $\lg 3 = 0,477$, să se calculeze:

$\lg 6$; $\lg 15$: $\lg 32$; $\lg 30$; $\lg\frac{1}{12}$.

3. Să se calculeze cu ajutorul tabelelor de logaritmi, logaritmii zecimali ai următoarelor numere: 37 · 990; 235; 99; 301; 1457; 1,231; 54,36; 10325; 26739; 263,56; 35,074; 0,0028631; 28 · 534,215.

4. Să se efectueze operațiile:

a) $\overline{1},4792 + \overline{2},4506 + 3,0025$; b) $\overline{7},0032 + 3,8265 + \overline{3},8502$: c) $0,9329 - \overline{1},2543 - \overline{5},06$;

d) $\overline{2},4645 - \overline{4},3732 + \overline{5},2104 - \overline{8},3714$.

5. Să se efectueze următoarele operații, rotunjindu-se cu o eroare mai mică decît 0,00001.

a) $\overline{2},21455 \cdot 0,36$; b) $\overline{4} \cdot 51203 \cdot 9,8$; c) $\overline{1},02561 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$; d) $\overline{6},45437 \cdot (-0,2)$.

6. Folosind tabelele de logaritmi, să se calculeze:

a) $\lg \sqrt[5]{2431}$; b) $\lg (53,24)^6$; c) $\lg (21,4)^3 \cdot \sqrt[4]{6531}$; d) $\log_3 5$; e) $\log_9 17$; f) $\log_{0,024} 0,312$.

7. Să se calculeze x cunoscînd logaritmul său zecimal:

a) $\lg x = 0,36253$; b) $\lg x = 4,00021$; c) $\lg x = -0,39285$; d) $\lg x = 2,54401$;
e) $\lg x = -1,02574$.

8. Să se efectueze, cu ajutorul tabelelor de logaritmi, următoarele calcule:

a) $\dfrac{12,48^3 \sqrt[4]{5,76}}{\sqrt[5]{673,8} \cdot 1,842}$; b) $\sqrt[6]{\dfrac{2,591 \cdot \sqrt[3]{0,0836}}{1,147^2}}$; c) $\sqrt[3]{\dfrac{(3,89)^6(-0,1536)}{0,924^6}}$;
d) $\sqrt[3]{5\sqrt[5]{2} + \sqrt[5]{3} - 2\sqrt[5]{5}}$.

§ 4. Ecuații exponențiale și ecuații logaritmice

4.1. Ecuații exponențiale

Ecuația exponențială este o ecuație în care necunoscuta este exponent, sau o ecuație în care este exponent o expresie care conține necunoscuta.

Astfel ecuațiile: $3^x = 2^{x-1}$; $5^{x^2-6} - 1 = 0$ și $2^{x+3} + 4^{x+1} = 320$ sînt ecuații exponențiale.

În practică, cînd avem de rezolvat o ecuație exponențială, vom proceda astfel: folosind diverse substituții precum și proprietățile funcției exponențiale, vom căuta s-o reducem la rezolvarea unor ecuații simple, de regulă de gradul întîi sau gradul al doilea.

Cele mai multe ecuații exponențiale sînt reductibile la forma $a^{f(x)} = b$, cu $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$.

Datorită injectivității funcției logaritmice, această ecuație este echivalentă cu

$$f(x) = \log_a b = \frac{\lg b}{\lg a}.$$

În aplicațiile practice, în aceste ecuații b se poate de obicei exprima ca putere a lui a,

$$b = a^\alpha,$$

de unde rezultă ecuația

$$f(x) = \alpha.$$

Exemplu. Să se rezolve ecuațiile $2^{2x} = 64$; $3^{2^x} = 81$; $5^{x^2-x-2} = 625$.

Vom avea $2^{2x} = 2^6$, de unde rezultă $2x = 6$, adică $x = 3$.

Din ecuația $3^{2^x} = 81$, $3^{2^x} = 3^4$, deducem $2^x = 4$, $2^x = 2^2$ și deci $x = 2$.

Pentru ultima ecuație obținem $5^{x^2-x-2} = 5^4$, deci $x^2 - x - 2 = 4$, de unde rezultă

$$x^2 - x - 6 = 0.$$

Avem în final $x_1 = 3$ și $x_2 = -2$.

Dacă într-o ecuație de forma $a^x = b$, b nu se poate exprima ca putere a lui a, atunci ecuația se rezolvă folosind tabelele de logaritmi, ținînd cont că

$$x = \lg_a b = \frac{\lg b}{\lg a}.$$

Să rezolvăm, de *exemplu*, ecuația $18^x = 3,1$.
Ea este echivalentă cu:

$$x = \frac{\lg 3,1}{\lg 18} \approx \frac{0,49136}{1,25527} \approx 0,39.$$

Unele ecuații exponențiale se aduc la forma mai generală $a^{f(x)} = a^{g(x)}$. Din această ecuație ținînd cont de injectivitatea funcției exponențiale, deducem: $f(x) = g(x)$, care apoi se rezolvă.

Exemple. 1) Să se rezolve ecuația $3^{x-6} = 3^{15-2x}$.

Obținem $x - 6 = 15 - 2x$, deci $3x = 21$, $x = 7$.

2) Să se rezolve ecuația $49^x = \left(\frac{1}{7}\right)^{x^2}$.

Obținem $7^{2x} = 7^{-x^2}$, deci

$$2x = -x^2, \text{ de unde deducem } x_1 = 0,\ x_2 = -2.$$

Există ecuații exponențiale care nu se pot reduce la nici una din formele discutate.

Exemple. 1) $2^x = 3^{2x+1}$.

Ținînd cont de injectivitatea funcției logaritmice, obținem prin logaritmare ecuația echivalentă

$$x \lg 2 = (2x + 1) \lg 3 \text{ și deci}$$
$$x(2 \lg 3 - \lg 2) = -\lg 3,$$
$$x = \frac{-\lg 3}{2 \lg 3 - \lg 2},$$

această ultimă expresie a lui x se calculează apoi cu aproximație, din tabele.

2) $5^{7^x} = 7^{5^x}$.

Logaritmînd deducem $7^x \lg 5 = 5^x \lg 7$; logaritmînd din nou obținem $x \lg 7 + \lg \lg 5 = x \lg 5 + \lg \lg 7$ și deci

$$x = \frac{\lg \lg 7 - \lg \lg 5}{\lg 7 - \lg 5}, \text{ expresie care se calculează cu aproximație din tabele.}$$

3) $3^{2x} \cdot 5^{2x-3} = 7^{x-1} \cdot 4^{x+3}$.

Deducem că $2x \lg 3 + (2x - 3) \lg 5 = (x - 1) \lg 7 + (x + 3) \lg 4$, prin urmare $x(2 \lg 3 + 2 \lg 5 - \lg 7 - \lg 4) = 3 \lg 5 - \lg 7 + 3 \lg 4$: în final avem

$$x = \frac{3 \lg 5 - \lg 7 + 3 \lg 4}{2 \lg 3 + 2 \lg 5 - \lg 7 - \lg 4} = \frac{\lg \frac{125 \cdot 64}{7}}{\lg \frac{225}{28}} \approx \frac{3,05799}{0,90502};\ x \approx 3,367.$$

4) Să considerăm în cele ce urmează ecuația $4^x + 2^x = 272$.

Pentru a rezolva ecuații de acest tip vom observa mai întîi că putem scrie $2^{2x} + 2^x - 272 = 0$ și deci făcînd substituția $2^x = y$, obținem:

$$y^2 + y - 272 = 0,$$
$$y_1 = 16,\ y_2 = -17.$$

Deoarece $2^x > 0$, rezultă că -17 nu poate fi egal cu 2^x și deci singura soluție se obține din $2^x = 16$, $2^x = 2^4$, deci $x = 4$.

În unele situații, substituția efectuată la exercițiul precedent nu se poate face imediat în forma inițială a exercițiului. Să luăm, de exemplu, ecuația: $6^x + 4^x = 9^x$.

Vom împărți ambii termeni cu 9 și obținem

$$\left(\frac{6}{9}\right)^x + \left(\frac{4}{9}\right)^x = 1.$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x + \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} = 1.$$

Făcînd substituția $\left(\frac{2}{3}\right)^x = y$, obținem $y^2 + y - 1 = 0$ și deci

$$y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Deoarece $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < 0$, rezultă că singura soluție a ecuației o obținem din:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \text{ și deci } x = \frac{\lg \frac{\sqrt{5}-1}{2}}{\lg \frac{2}{3}}.$$

4.2. Ecuații logaritmice

Ecuațiile logaritmice sînt ecuații în care expresiile ce conțin necunoscuta apar ca bază sau ca argument al unor logaritmi.

De *exemplu:*

$$\log_{x+1}(x+2) = 1;\ \lg(x^2+x-2) = 3;\ \log_x(5x^2+3) = \lg(2x+3) - 1.$$

Folosind injectivitatea funcției exponențiale avem că, rezolvarea unei ecuații de tipul $\log_{g(x)} f(x) = b$ este echivalentă cu rezolvarea ecuației $f(x) = g(x)^b$. Vom avea însă grijă ca soluțiile obținute să satisfacă $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $g(x) \neq 1$, pentru care expresia $\log_{g(x)} f(x)$ are sens.

La fel ca la ecuațiile exponențiale, în practică cînd avem de rezolvat o ecuație logaritmică, vom proceda astfel: folosind diverse substituții precum și proprietățile logaritmilor, vom căuta s-o reducem la rezolvarea unor ecuații simple, de regulă, de gradul întîi sau gradul al doilea.

Exemplu. Să se rezolve ecuația:

$$\log_x(x^2-3x+9) = 2.$$

Obținem $x^2 - 3x + 9 = x^2$ și deci $3x = 9$, $x = 3$.
Deoarece pentru $x = 3 > 0$, expresia $x^2 - 3x + 9$ este pozitivă, rezultă că $x = 3$ este soluție a ecuației.

Rezolvarea altor ecuații se bazează pe injectivitatea funcției logaritmice, și anume din $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, deducem $f(x) = g(x)$, însă avînd grijă să punem condiția $f(x) > 0$, $g(x) > 0$.

Exemple. 1) Să se rezolve ecuația:

$$\lg(x^2-15) = \lg(x-3).$$

Deducem $x^2 - 15 = x - 3$, deci $x^2 - x - 12 = 0$, adică $x_1 = 4$, $x_2 = -3$.
Deoarece pentru $x_2 = -3$ obținem $x - 3 = -3 - 3 = -6 < 0$, rezultă că $x_2 = -3$ nu este soluție a ecuației. Deci numai 4 este soluție.

2) Să se rezolve ecuația

$$2\lg(x-1) = \frac{1}{2}\lg x^5 - \lg\sqrt{x}.$$

În această ecuație punem de la început condițiile

$x - 1 > 0$, $x > 0$, pentru a avea sens expresiile $\lg(x-1)$, $\lg x^5$, $\sqrt{x}$, $\lg\sqrt{x}$.

Ecuația se mai scrie

$$2\lg(x-1) = \frac{5}{2}\lg x - \frac{1}{2}\lg x \text{ și deci}$$

$2\lg(x-1) = 2\lg x$. Prin urmare $\lg(x-1) = \lg x$,

de unde obținem $x - 1 = x$, $-1 = 0$ egalitate ce nu are sens: rezultă că ecuația dată nu are soluții.

3) Să se rezolve ecuația

$$\lg(x+7) + \lg(3x+1) = 2.$$

Punem condițiile de existență a logaritmilor:

$$x + 7 > 0 \text{ și } 3x + 1 > 0, \text{ deci } x > -\frac{1}{3}$$

Obținem $\lg(x+7)(3x+1) = 2$ și deci

$$(x+7)(3x+1) = 10^2 = 100.$$

Rezultă ecuația de gradul al doilea

$3x^2 + 22x - 93 = 0$, de unde vom avea

$$x_1 = 3,\ x_2 = -\frac{31}{3}.$$

Deoarece $-\frac{31}{3} < -\frac{1}{3}$, obținem că 3 este singura soluție a ecuației date.

Observație. Ecuația precedentă nu este echivalentă cu ecuația

$$\lg(x+7)(3x+1) = 2,$$

care are două soluții $x_1 = 3$, $x_2 = -\frac{31}{3}$, deoarece pentru amîndouă aceste valori ale lui x, $\lg(x+7)(3x+1)$ are sens.

4) Să se rezolve ecuația

$$\log_3^2 x - 3\log_3 x - 4 = 0$$

Avem condiția $x > 0$ și făcînd substituția $\log_3 x = y$, obținem $y^2 - 3y - 4 = 0$. Deci $y_1 = 4$, $y_2 = -1$. Din $\log_3 x = 4$, obținem $x = 3^4$, $x = 81$, iar din $\log_3 x = -1$, obținem $x = 3^{-1}$, $x = \frac{1}{3}$.

În continuare vom rezolva cîteva ecuații care nu se pot încadra într-un anumit tip. Astfel, pot apărea ecuații cu logaritmi scriși în diferite baze, ecuații în care apar expresii conținînd necunoscute și la exponenți și la logaritmi etc.

5) Să se rezolve ecuația

$$\log_2 x + \log_3 x = 1.$$

Deducem, aplicînd formula de schimbare a bazei,

$$\frac{\lg x}{\lg 2} + \frac{\lg x}{\lg 3} = 1, \text{ sau } \lg x = \frac{\lg 2 \lg 3}{\lg 2 + \lg 3} = \frac{\lg 2 \lg 3}{\lg 6}.$$

Deci $x = 10^{\frac{\lg 2 \lg 3}{\lg 6}}$

6) Să se rezolve ecuația

$$\log_3 x + \log_x 3 = 2.$$

Deoarece $\log_x 3 = \frac{1}{\log_3 x}$, rezultă $\log_3 x + \frac{1}{\log_3 x} = 2.$

Notînd $\log_3 x = y$, obținem $y + \frac{1}{y} = 2$, adică $y^2 - 2y + 1 = 0$; deci $y = 1$ adică $\log_3 x = 1$.
Prin urmare, $x = 3^1$, $x = 3$.

7) Să se rezolve ecuația

$$x^{\lg x + 2} = 1\,000.$$

Punem condiția de existență a expresiilor, $x > 0$. Logaritmînd, obținem o ecuație echivalentă $\lg(x^{\lg x+2}) = \lg 1\,000$, care devine $(\lg x + 2)\lg x = 3$. Notînd $\lg x = y$, avem $y^2 + 2y - 3 = 0$ și deci $y_1 = -3$, $y_2 = 1$.
Din $\lg x = -3$, obținem $x = 10^{-3}$, $x = 0{,}001$, iar din $\lg x = 1$, obținem $x = 10^1$, $x = 10$.

4.3. Sisteme de ecuații exponențiale și logaritmice

În astfel de sisteme se aplică metodele arătate anterior, la ecuațiile de tipul respectiv.

Exemple. 1) Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} 27^{2y-1} = 243 \cdot 3^{4x+2}, \\ 3 \cdot 3^{x+y} = \sqrt{81^{2x-1}}. \end{cases}$$

Deoarece $27 = 3^3$, $81 = 3^4$, $243 = 3^5$, obținem:

$$\begin{cases} 3^{6y-3} = 3^{4x+7}, \\ 3^{x+y} = 3^{4x-3}. \end{cases}$$

Rezultă sistemul echivalent:

$$\begin{cases} 6y - 3 = 4x + 7, \\ x + y = 4x - 3 \end{cases}$$

deci $x = 2$, $y = 3$ și soluția sistemului este perechea $(2, 3)$.

2) Să se rezolve sistemul:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 425, \\ \lg x + \lg y = 2. \end{cases}$$

Obținem pe rînd sistemele echivalente

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 425, \\ \lg xy = 2, \\ x, y > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 425, \\ xy = 100, \\ x, y > 0. \end{cases}$$

Acest sistem simetric îl putem rezolva pe căile cunoscute din clasa a IX-a: punem $s = x + y$, $p = xy$ și vom avea

$$\begin{cases} s^2 - 2p = 425 \\ p = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s^2 = 625 \\ p = 100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s = \pm 25 \\ p = 100. \end{cases}$$

Sistemul $\begin{cases} s = 25 \\ p = 100 \end{cases}$ dă soluțiile $(5, 20)$ și $(20, 5)$ care satisfac și condițiile de existență a sistemului inițial $x > 0$, $y > 0$; sistemul $\begin{cases} s = -25 \\ p = 100 \end{cases}$ dă soluțiile $(-20, -5)$, $(-5, -20)$ care nu convin.

4.4. Inecuații logaritmice și exponențiale

Rezolvarea inecuațiilor exponențiale și logaritmice se bazează pe proprietățile de monotonie ale funcțiilor exponențiale și logaritmice. Am văzut că atît funcția exponențială cît și funcția logaritmică sînt crescătoare dacă baza este supraunitară și descrescătoare dacă baza este subunitară.

Exemple. 1) Să se rezolve inecuația:

$$3^x > 9.$$

Inecuația se scrie $3^x > 3^2$ și deoarece funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = 3^x$ este crescătoare, rezultă că $x > 2$.

2) Să se rezolve inecuația:

$$2^{x^2-4x} > \frac{1}{8}.$$

Deoarece $\frac{1}{8} = 2^{-3}$ inecuația se scrie $2^{x^2-4x} > 2^{-3}$ care este echivalentă cu $x^2 - 4x > -3$. Rezolvarea inecuației $x^2 - 4x + 3 > 0$ dă pentru x valorile posibile $x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$.

3) Să se rezolve inecuația:

$$\log_{\frac{1}{3}} (2x - 1) > -3.$$

Avem că $-3 = \log_{\frac{1}{3}} 27$ și inecuația devine $\log_{\frac{1}{3}} (2x - 1) > \log_{\frac{1}{3}} 27$. Deoarece baza $\frac{1}{3}$ a logaritmului este subunitară (funcția $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ este descrescătoare), inecuația devine $2x - 1 < 27$, adică $x < 14$. În același timp, din condiția de existență a logaritmului inițial avem $2x - 1 > 0$, adică $x > \frac{1}{2}$. Deci, obținem pentru x valorile posibile $x \in \left(\frac{1}{2}, 14\right)$.

Exerciții

Să se rezolve ecuațiile (exercițiile 1—11):

1. a) $5^x = 125$; b) $4^x = 1024$; c) $9^x = \frac{1}{729}$; d) $25^x = 0,2$; e) $2^{x+3} = 32$; f) $8^x = 16$; g) $6^{-x} = 1296$; h) $3^x = \sqrt[3]{9}$.

2. a) $\left(\frac{4}{9}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^{-5}$; b) $\left(\frac{2}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{9}{8}\right)^x = \frac{27}{64}$; c) $3^{2x-1} = 81$; d) $2^{x^2-6x-2,5} = 16\sqrt{2}$;
e) $a^{(x-2)(x-3)} = 1$ $(a > 0,\ a \neq 1)$.

3. a) $5^x + 5^{x+1} = 3750$; b) $7^x - 7^{x-1} = 6$; c) $3^{x-1} + 3^{x-2} + 3^{x-3} = 13$;
d) $7^{x+2} + 4 \cdot 7^{x-1} = 347$; e) $3^{x+1} + 5 \cdot 3^{x-1} - 7 \cdot 3^x + 21 = 0$.

4. a) $4^{\sqrt{x+1}} = 64 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}$; b) $\sqrt{8^{x-1}} = \sqrt[3]{4^{2-x}}$; c) $16\sqrt{(0,25)^{5-\frac{x}{4}}} = 2^{\sqrt{x+1}}$.

5. a) $5^{2x} - 5^x - 600 = 0$;
b) $9^x - 3^x - 6 = 0$;
c) $4^x + 2^{x+1} = 80$;
d) $3^x + 9^{x-1} - 810 = 0$;
e) $4 + \frac{2}{5^x - 1} = \frac{3}{5^{x-1}}$;
f) $\left(\frac{3}{5}\right)^{x+1} + \left(\frac{3}{5}\right)^{1-x} = 1,2$;
g) $3^{2\sqrt{x}} - 4 \cdot 3^{\sqrt{x}} + 3 = 0$;
h) $2 \cdot 25^x = 10^x + 4^x$;
i) $3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$;
j) $\left(\sqrt{3 + 2\sqrt{2}}\right)^x - \left(\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}\right)^x = \frac{3}{2}$.

6. a) $3 \cdot 2^x = 2 \cdot 3^x$; b) $7 \cdot 2^x = 5 \cdot 3^x$; c) $11^x = 17^x$; d) $a^x = b^x (a > 0,\ b > 0,\ a \neq b)$;
e) $6^{2x+4} = 2^{8+x} \cdot 3^{3x}$.

7. a) $\lg x = \lg 2$; b) $\lg x = -\lg 2$; c) $\log_2(x - 1) = \log_2(x^2 - x - 16)$;
d) $\frac{2 \lg x}{\lg(5x - 4)} = 1$.

8. a) $\log_{x-1}(x^2 - 5x + 7) = 1$; b) $\log_x 2 - \log_x 3 = 2$; c) $\log_x(x + 3) = \log_x (x^2 + 1)$.

9. a) $\frac{1}{12} \lg^2 x = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \lg x$; b) $3 \lg^2(x^2) - \lg x - 1 = 0$; c) $2 \lg^2(x^3) - 3 \lg x - 1 = 0$;
d) $4 \log_3^2 5x - 7 \log_3 15x + 7 = 0$.

10. $5^{\lg x} - 3^{\lg x - 1} = 3^{\lg x + 1} - 5^{\lg x - 1}$.

11. $\sqrt{\log_2 \sqrt[4]{2x} + \log_x \sqrt[4]{2x}} + \sqrt{\log_2 \sqrt[4]{\frac{x}{2}} + \log_x \sqrt[4]{\frac{2}{x}}} = 2$.

12. Să se rezolve sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases} x^4 + y^4 = 641, \\ 2 \lg x + 2 \lg y = 2; \end{cases}$ b) $\begin{cases} 9^{x+y} = 729, \\ 3^{x-y-1} = 1; \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = 90, \\ \lg x + \lg y = 3; \end{cases}$ d) $\begin{cases} x^y - y^x = 0, \\ 2^x - 4^y = 0; \end{cases}$

e) $\begin{cases} xy = 40, \\ x^{\lg y} = 4; \end{cases}$ f) $\begin{cases} x^{\sqrt{y}} = y^x, \\ y^{\sqrt{x}} = x^y. \end{cases}$

13. Să se rezolve inecuațiile:

a) $\lg(x^2 - 3) > \lg(x + 3)$; b) $\lg^2 x - 2 \lg x - 8 \leqslant 0$; c) $(0{,}25)^{x-4} \leqslant \left(\frac{1}{16}\right)^x$.

14. Să se rezolve inecuațiile:

a) $\log_2(9 - 2^x) > 3 - x$; b) $\lg 2 + \lg (4^{x-2} + 9) \leqslant 1 + \lg (2^{x-2} + 1)$.

15. Să se rezolve inecuația

$$3^x + 4^x > 5^x.$$

16. Să se rezolve și să se discute după valorile parametrului a, inecuațiile:

a) $\log_a x - \log_{a^2} x + \log_{a^4} x \geqslant \frac{3}{4}$;

b) $\log_a x + \log_a(x + 5) + \log_a 0{,}02 < 0$.

II Inducție matematică. Combinatorică

§ 1. Inducția matematică

1.1. Noțiunile de deducție și inducție

Propozițiile (în sensul logicii matematice) pot fi clasate în *propoziții generale* și *propoziții particulare*. Astfel, propozițiile: „În orice triunghi suma măsurilor unghiurilor sale este egală cu 180°", „Orice număr a cărui ultimă cifră este 0 sau 5 este divizibil cu 5", care au un caracter general, sînt propoziții generale. Însă propozițiile: „Suma măsurilor unghiurilor triunghiului ABC este egală cu 180°", „Numerele 1980 și 1985 sînt divizibile cu 5" sînt propoziții particulare, de fapt sînt, respectiv, cazuri particulare ale propozițiilor generale de mai înainte.

Procedeul prin care din propoziții generale se obțin propoziții particulare se numește *deducție*.

Una dintre trăsăturile caracteristice matematicii și altor științe (de *exemplu*, mecanicii teoretice, fizicii teoretice, lingvisticii matematice) este *construcția deductivă a teoriei*, prin care toate afirmațiile decurg, apelînd la deducție, din cîteva principii de bază numite axiome.

Dar deducția nu este singura metodă de raționament științific. În același timp cu aceasta, în matematică se trece adesea de la propoziții particulare la propoziții generale, adică se fac raționamente inductive.

Prin *inducție* se înțelege o metodă de raționament care conduce de la propoziții particulare la o oarecare propoziție generală.

Să dăm cîteva *exemple*:

1. Să calculăm sumele succesive de numere naturale impare: 1, $1 + 3$, $1 + 3 + 5$, $1 + 3 + 5 + 7$, $1 + 3 + 5 + 7 + 9$. Obținem, respectiv, numerele $1 = 1^2$, $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $16 = 4^2$, $25 = 5^2$. Observăm că în toate cazurile considerate suma este egală cu pătratul numărului termenilor sumei. În mod natural, se poate presupune că această proprietate ar putea să aibă loc pentru orice astfel de sumă (avînd oricît de mulți termeni). Presupunerea (ipoteza) noastră se poate formula astfel: Pentru orice număr natural $n \geqslant 1$, are loc egalitatea:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2. \quad (1)$$

Astfel cele cinci cazuri particulare ne-au sugerat o ipoteză care, după cum vom arăta în continuare la punctul 1.2, este adevărată.

2. Fie trinomul

$$f(x) = x^2 + x + 41.$$

Înlocuind pe x cu numerele naturale $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, obținem:

$$f(0) = 41,\ f(1) = 43,\ f(2) = 47,\ f(3) = 53,\ f(4) = 61,\ f(5) = 71.$$

Observăm că toate valorile trinomului obținute mai înainte sînt numere prime. Se poate emite ipoteza că valoarea trinomului $f(x)$ este număr prim pentru orice număr natural x. Totuși, această ipoteză este falsă, deoarece, de exemplu

$$f(40) = 40^2 + 40 + 41 = 40(40 + 1) + 41 = 41(40 + 1) = 41^2,$$

care nu este număr prim. De fapt, $x = 40$ este primul număr natural pentru care $f(x)$ nu este prim.

3. Matematicianul francez Pierre Fermat (1601—1665) considerînd numerele: $2^{2^0} + 1 = 3$, $2^{2^1} + 1 = 5$, $2^{2^2} + 1 = 17$, $2^{2^3} + 1 = 257$, $2^{2^4} + 1 = 65537$, care sînt numere prime, a tras concluzia că pentru orice număr natural n numărul $2^{2^n} + 1$ este prim. El nu a reușit să verifice dacă pentru $n = 5$, numărul $2^{2^5} + 1 = 4\,294\,967\,297$ este sau nu este prim.

Însă, matematicianul și fizicianul elvețian Leonard Euler (1707—1783) a arătat că acest număr, nu este prim, mai precis:

$$2^{2^5} + 1 = 641 \times 6\,700\,417.$$

Ulterior s-au găsit și alte valori ale lui n, $n = 6, 7, 8, 9, 11, 12, 18, 23, 36, 38, 73$, pentru care numărul $2^{2^n} + 1$ nu este prim.

4. Matematicianul polonez Waclaw Sierpinski (1882—1969) a emis ipoteza că numărul $991n^2 + 1$ nu dă pătrate perfecte pentru n natural. Aceasta s-a dovedit a fi falsă, cel mai mic număr natural n pentru care se obține pătrat perfect fiind un număr format din 29 de cifre.

5. Din mica teoremă a lui Fermat (aplicație, pct. 3.2, § 3 din acest capitol) rezultă că dacă $p \geqslant 3$ este un număr prim, atunci $2^{p-1} - 1$ se divide cu p. Totuși oricare ar fi numărul prim $p < 1000$, $2^{p-1} - 1$ nu se divide cu p^2. De aici ar putea urma că, în general, pentru nici un număr prim p, numărul $2^{p-1} - 1$ nu se divide cu p^2. Totuși s-a arătat că $2^{1093-1} - 1$ se divide cu 1093^2.

Exemplele de mai sus arată că aceeași metodă de raționament conduce în unele cazuri la propoziții adevărate, iar în altele la propoziții false. Deoarece prin această metodă concluzia se trage după considerarea cîtorva exemple, și nu a tuturor cazurilor posibile, această metodă de raționament se numește *inducție incompletă*.

Inducția incompletă, după cum am văzut, nu conduce mereu la propoziții adevărate, dar este folositoare, deoarece permite să se formuleze o presupunere, care după aceea poate fi confirmată sau infirmată.

Cîteodată însă, o astfel de metodă de raționament poate să conducă, studiind un număr finit de cazuri, la epuizarea tuturor posibilităților. Iată două *exemple* în acest sens:

1. Să se demonstreze că fiecare număr natural par n, unde $4 \leqslant n \leqslant 20$, se poate scrie ca suma a două numere prime (care pot fi și egale).

Pentru demonstrație să considerăm fiecare din numerele pare cuprinse între 4 și 20. Avem: $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$, $10 = 3 + 7$, $12 = 5 + 7$, $14 = 7 + 7$, $16 = 5 + 11$, $18 = 7 + 11$, $20 = 7 + 13$.

2. Să se demonstreze că pentru orice poliedru regulat este îndeplinită relația $V - M + F = 2$, unde V este numărul vîrfurilor, M este numărul muchiilor, iar F este numărul fețelor.

Pentru demonstrație, este suficient să considerăm numai cinci cazuri, și anume: tetraedru, octoedru, cub, dodecaedru, icosaedru, deoarece nu există alte poliedre regulate. Pentru aceste cinci cazuri afirmația se verifică direct, deoarece pentru tetraedru: $V = 4$, $M = 6$, $F = 4$; pentru octoedru: $V = 6$, $M = 12$, $F = 8$; pentru cub: $V = 8$, $M = 12$, $F = 6$; pentru dodecaedru: $V = 20$, $M = 30$; $F = 12$; pentru icosaedru: $V = 12$, $M = 30$, $F = 20$. Într-adevăr, pentru toate cele cinci poliedre avem: $V - M + F = 2$.

O astfel de metodă de raționament, în care concluzia rezultă pe baza cercetării tuturor cazurilor, se numește *inducție completă*.

1.2. Metoda inducției matematice

Inducția completă are un domeniu restrîns de aplicabilitate în matematică. De regulă, propozițiile matematice se referă la o mulțime infinită de elemente (de exemplu, mulțimea numerelor naturale, mulțimea numerelor prime, mulțimea poliedrelor ș.a.m.d.) și nu este posibil de considerat, pe rînd, toate aceste elemente. Există însă o metodă de a raționa, care înlocuiește analiza, de altfel imposibil de realizat în practică, a unei mulțimi infinite de cazuri cu demonstrarea faptului că, dacă o propoziție este adevărată într-un caz, atunci ea se dovedește a fi adevărată și în cazul care succede acestuia. O astfel de metodă de raționament se numește *inducție matematică*.

Să reluăm presupunerea (ipoteza) făcută în paragraful precedent: *Pentru orice număr natural $n \geqslant 1$ are loc egalitatea*:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2. \quad (1)$$

Să notăm cu $P(n)$ egalitatea (1), pentru numărul natural n. Atunci, faptul că $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, $P(4)$, $P(5)$ sînt adevărate, înseamnă că egalitatea (1) are loc respectiv pentru $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$, după cum s-a arătat în paragraful precedent.

Întrucît $P(5)$ este adevărată: $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$, avem

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 5^2 + 2 \cdot 5 + 1 = (5 + 1)^2 = 6^2,$$

adică este adevărată $P(6)$.

Astfel, am demonstrat că dacă $P(5)$ este adevărată, rezultă că este adevărată $P(6)$.

Să demonstrăm, în același mod, că pentru un număr natural oarecare $k \geqslant 1$, avem $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$.

Aceasta înseamnă că din egalitatea

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$$

să rezulte egalitatea

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k + 1) = (k + 1)^2.$$

Într-adevăr,

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = [1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1)] + $$
$$+ (2k + 1) = k^2 + 2k + 1 = (k + 1)^2.$$

Astfel, egalitatea $P(n)$ este adevărată pentru $n = 1$, iar din faptul că ea este adevărată pentru $n = k$, rezultă că ea este adevărată și pentru $n = k + 1$.

Atunci $P(1) \Rightarrow P(2)$, deoarece $2 = 1 + 1$; $P(2) \Rightarrow P(3)$, deoarece $3 = 2 + 1$; $P(3) \Rightarrow P(4)$, deoarece $4 = 3 + 1$; $P(4) \Rightarrow P(5)$, deoarece $5 = 4 + 1$ ș.a.m.d.

Pare natural că în modul acesta se poate ajunge pînă la orice număr n, adică $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \geqslant 1$; deci raționamentul făcut pare convingător. Acest raționament este riguros din punct de vedere matematic, deoarece este un caz particular al unui principiu de bază al matematicii, numit *principiul inducției matematice (primul principiu de inducție)*.

Acesta se formulează astfel:

Dacă o propoziție P(n), n fiind un număr natural, este adevărată pentru n = 0, și, din aceea că ea este adevărată pentru n = k (unde k este un număr natural oarecare) rezultă că ea este adevărată și pentru numărul natural n = k + 1, atunci propoziția P(n) este adevărată pentru orice număr natural n.

În aritmetică se pune în evidență că principiul inducției matematice constituie una din axiomele de bază ale *aritmeticii numerelor naturale*, avînd numeroase aplicații. Acest principiu ne dă metoda de demonstrație numită *metoda inducției matematice*.

Fie P(n) o propoziție care depinde de un număr natural $n \geqslant m$, m fiind un număr natural fixat.

Demonstrația prin metoda inducției matematice a propoziției P(n), constă din două etape:

1°. *Se verifică mai întîi că $P(m)$ este adevărată.*

2° *Se presupune că $P(k)$ este adevărată și se demonstrează că $P(k+1)$ este adevărată, k fiind un număr natural $\geqslant m$ (adică $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, $k \geqslant m$).*

Dacă ambele etape ale demonstrației sînt verificate, atunci propoziția P(n) este adevărată pentru orice număr natural $n \geqslant m$.

Intuitiv, această metodă de demonstrație se justifică astfel:

Din $P(m)$ adevărată și $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, pentru orice $k \geqslant m$, rezultă $P(m+1)$ adevărată ($k = m$); apoi luînd $k = m + 1$ se obține că $P(m+2)$ este adevărată ș.a.m.d. Raționînd „din aproape în aproape" deducem că propoziția $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural $n \geqslant m$.

Metoda inducției matematice arată că egalitatea (1) ete adevărată pentru orice număr natural $n \geqslant 1$, deoarece ea este adevărată pentru $m = 1$, și din $P(k)$ rezultă $P(k+1)$, pentru $k \geqslant 1$.

Observații

1) Dacă se cere să demonstrăm că propoziția $P(n)$ este adevărată pentru orice $n \geqslant m$, m fiind un număr natural fixat, prima etapă a demonstrației prin inducție matematică constă în verificarea faptului că $P(n)$ este adevărată pentru $n = m$ și nu pentru alt număr natural. Este posibil ca pentru numerele naturale mai mici decît m propoziția să fie falsă, sau să nu aibă sens.

2) Cele două etape ale demonstrației prin metoda inducției matematice sînt la fel de importante. În paragraful precedent, considerînd exemplul $f(x) = x^2 + x + 41$, ne-am convins că o propoziție poate fi adevărată pentru un număr de cazuri particulare, nefiind adevărată în general. Acest exemplu arată cît de importantă este etapa a doua a demonstrației prin inducție matematică.

Nu înseamnă că prima etapă este mai puțin importantă decît a doua. Iată un exemplu care arată la ce concluzie absurdă se poate ajunge, dacă se omite prima etapă a demonstrației prin inducție matematică.

Să considerăm propoziția $P(n)$:

Orice număr natural n este egal cu succesorul său".

Să presupunem că $P(k)$ este adevărată, k fiind un număr natural adică $k = k + 1$. Adunînd 1 la fiecare membru al egalității $k = k + 1$, rezultă $k + 1 = k + 2$, adică $P(k+1)$ este adevărată. Etapa a doua a demonstrației a fost efectuată, totuși propoziția nu este adevărată. Într-adevăr, pentru $n = 0$, $P(n)$ nu este adevărată, deoarece $0 \neq 1$, și deci prima etapă a demonstrației prin inducție matematică ne spune că $P(n)$ este falsă.

Metoda inducției matematice are o largă utilizare în matematică. Ea poate fi folosită la calcularea de sume și produse, la demonstrarea unor egalități și inegalități, în probleme de divizibilitate a numerelor. Vom da cîteva exemple în care utilizăm metoda inducției matematice.

Exemple

1) Să se calculeze suma

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)},$$

pentru orice număr natural $n \geqslant 1$.

Soluție. Notăm această sumă cu S_n. Ca să stabilim expresia sumei S_n, calculăm suma în cîteva cazuri particulare: S_1, S_2, S_3, S_4.

Considerînd aceste numere formulăm ipoteza și după aceea pentru demonstrarea ei folosim metoda inducției matematice.

$$S_1=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2};$$

$$S_2=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=S_1+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{2}{3};$$

$$S_3=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}=S_2+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{3}{4};$$

$$S_4=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}=S_3+\frac{1}{4\cdot 5}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4\cdot 5}=\frac{4}{5}.$$

Cercetînd aceste sume observăm că numărătorul este indicele sumei căutate, iar numitorul este succesorul său. În acest mod, formulăm următoarea ipoteză:

Pentru orice număr natural $n \geqslant 1$, are loc egalitatea:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}. \quad (2)$$

Să notăm cu $P(n)$ egalitatea (2), pentru numărul natural n. Demonstrăm că $P(n)$ este adevărată prin metoda inducției matematice.

1° $P(1)$ este adevărată, deoarece $S_1=\frac{1}{2}=\frac{1}{1+1}$.

2° Demonstrăm că $P(k) \Rightarrow P(k+1)$:

$$S_{k+1}=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=$$

$$=S_k+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)}=\frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)}=$$

$$=\frac{k+1}{k+2}=\frac{k+1}{(k+1)+1}.$$

Ambele etape ale demonstrației prin metoda inducției matematice sînt verificate. Prin urmare egalitatea (2) este demonstrată și deci

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

pentru orice număr natural $n \geqslant 1$.

2) Să se demonstreze că pentru orice $n > 1$, avem

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}. \quad (3)$$

Demonstrație. Notăm cu $P(n)$ egalitatea (3), pentru numărul natural n.

1° Pentru $n = 1$, egalitatea (3) devine $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ și deci $P(1)$ este adevărată.

2° Demonstrăm că $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

Avem

$$P(k) : 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} = \frac{1}{k+1} + \dots + \frac{1}{2k} \qquad (3')$$

$$P(k+1) : 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2(k+1)} =$$

$$= \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k} + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2(k+1)}. \qquad (3'')$$

Scăzînd membru cu membru, prima egalitate din a doua, obținem egalitatea

$$\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2(k+1)} = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1},$$

care este evident adevărată.

Înseamnă că dacă este adevărată egalitatea (3′) atunci este adevărată și egalitatea (3″). Conform metodei inducției matematice rezultă că egalitatea (3) este îndeplinită pentru orice număr natural $n \geqslant 1$.

3) Să se demonstreze că dacă $x > -1$ inegalitatea

$$(1 + x)^n \geqslant 1 + nx \qquad (4)$$

este adevărată, oricare ar fi numărul natural n.*

Demonstrație. Să notăm cu $P(n)$ inegalitatea (4), pentru numărul natural n.

1° Pentru $n = 0$, avem $(1 + x)^0 = 1 + 0 \cdot x = 1$, deci $P(0)$ este adevărată.

2° Să demonstrăm $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$.

Înmulțim ambii membri ai inegalității $(1 + x)^k \geqslant 1 + kx$ cu $1 + x$. Cum $1 + x > 0$, semnul inegalității nu se schimbă, deci:

$$(1 + x)^{k+1} \geqslant (1 + kx)(1 + x) = 1 + kx + x + kx^2.$$

Deoarece $kx^2 \geqslant 0$, cu atît mai mult avem:

$$(1 + x)^{k+1} > 1 + kx + x = 1 + (k + 1)x.$$

Deci

$$(1 + x)^{k+1} \geqslant 1 + (k + 1)x.$$

Conform metodei inducției matematice rezultă inegalitatea (4), pentru orice număr natural.

4) Să se demonstreze că $n^3 - n$ se divide cu 3, pentru orice număr natural n.

Demonstrație. Notăm cu $P(n)$ propoziția: $d_n = n^3 - n$ se divide cu 3.

Deoarece $d_0 = 0 - 0 = 0$, atunci pentru $n = 0$, d_n se divide cu 3, adică $P(0)$ este adevărată.

Să demonstrăm $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$, adică din: d_k se divide cu 3, să rezulte că d_{k+1} se divide cu 3.

Într-adevăr,

$$d_{k+1} = (k + 1)^3 - (k + 1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 - k - 1 = k^3 - k + 3(k^2 + k) =$$
$$= d_k + 3(k^2 + k).$$

Observăm că d_{k+1} este o sumă de doi termeni. Primul termen al acestei sume se divide cu 3, iar al doilea termen este evident divizibil cu 3. Prin urmare, fiecare termen al sumei d_{k+1} se divide cu 3, de unde și d_{k+1} se divide cu 3. Propoziția este demonstrată.

5) Să se demonstreze că numărul funcțiilor definite pe o mulțime cu n elemente într-o mulțime cu m elemente este m^n.

Demonstrație. Fie $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ și $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ două mulțimi, avînd n, respectiv m elemente. Să arătăm că numărul funcțiilor definite pe A, cu valori în B este m^n. Demonstrăm prin metoda inducției matematice, după n. Fie $P(n)$ afirmația: Numărul funcțiilor definite pe o mulțime cu n elemente într-o mulțime cu m elemente este m^n.

---

* Inegalitatea (4) se numește inegalitatea lui Bernoulli; Iacob Bernoulli (1654—1705) matematician elvețian.

1° $P(1)$ este adevărată, deoarece evident de la o mulțime cu un element într-o mulțime cu m elemente sînt $m = m^1$ funcții. Fiecare astfel de funcție duce unicul element al mulțimii A într-unul din cele m elemente ale mulțimii B.

2° Să arătăm că $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$. Fie mulțimea $A = \{a_1, a_2, \dots, a_{k+1}\}$ cu $k + 1$ elemente. Să considerăm $A' = A - \{a_{k+1}\} = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$. Cum $P(k)$ este adevărată rezultă că numărul funcțiilor definite pe A' cu valori în B este m^k. Dacă $f : A' \to B$ este o funcție oarecare, atunci definim $f_i : A \to B$, $1 \leqslant i \leqslant m$, prin $f_i(a_j) = f(a_j)$ pentru $1 \leqslant j \leqslant k$ și $f_i(a_{k+1}) = b$, unde $1 \leqslant i \leqslant m$. Așadar pentru orice funcție de la A' la B se obțin m funcții de la A la B. Mai mult, toate funcțiile de la A la B sînt de acest tip. Deci numărul funcțiilor de la A la B este $m^k \cdot m = m^{k+1}$. Conform metodei inducției matematice afirmația este demonstrată.

1.3. O variantă a metodei inducției matematice

Fie $A \subset \mathrm{N}$ o submulțime nevidă a mulțimii numerelor naturale. Spunem că a din A este un *prim element* (sau un *cel mai mic element*) al mulțimii A, dacă $a \leqslant x$ pentru orice x din A.

Dăm în continuare o proprietate importantă a mulțimii numerelor naturale, care se demonstrează cu ajutorul inducției matematice.

Teorema 1. 3. 1. **(proprietatea de bună ordonare a mulțimii numerelor naturale). Orice submulțime nevidă a mulțimii numerelor naturale are un prim element.**

Demonstrație. Fie $A \subset \mathrm{N}$ o submulțime nevidă. Dacă $0 \in A$, atunci 0 este primul element al său. Dacă $0 \notin A$, fie M mulțimea numerelor naturale n, astfel încît $n \leqslant x$, oricare ar fi $x \in A$. Evident, $0 \in M$ și dacă $x \in A$, atunci $x + 1 \notin M$. Deci $M \neq \mathrm{N}$. Vom arăta că există un număr natural $a \in M$ astfel încît $a + 1 \notin M$. Într-adevăr, presupunem prin absurd că pentru oricare $k \in M$ avem $k + 1 \in M$.

Fie propoziția $P(n)$: Dacă $n \in \mathrm{N}$, atunci $n \in M$.

Deoarece $0 \in M$, rezultă $P(0)$ adevărată.

Mai mult, $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$, deoarece după presupunerea prin absurd, dacă $k \in M$ atunci $k + 1 \in M$.

Conform metodei inducției matematice, rezultă $M = \mathrm{N}$, contradicție. Deci există $a \in M$ astfel încît $a + 1 \notin M$. Arătăm că a este numărul căutat. Într-adevăr $a \leqslant x$, pentru orice $x \in A$. Mai mult, $a \in A$; în caz contrar, $a < x$ pentru orice $x \in A$ și deci $a + 1 \leqslant x$, pentru orice $x \in A$. Așadar $a + 1 \in M$, contradicție.

Proprietatea mulțimii numerelor naturale de a fi bine ordonată stă la baza celui de *al doilea principiu de inducție matematică*. Acest principiu este echivalent cu primul principiu de inducție, însă, uneori este mai oportun pentru unele demostrații.

El se formulează astfel:

Dacă o propoziție $P(n)$, n fiind un număr natural, este adevărată pentru $n = 0$ și, din faptul că ea este adevărată pentru toate numerele $n < k$, rezultă că ea este adevărată și pentru $n = k$, atunci $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural n.

Demonstrație. Fie M submulțimea mulțimii N a numerelor naturale pentru care $P(n)$ este falsă. Dacă această submulțime este nevidă, atunci ea are un prim element k. Acest număr nu poate să fie 0, deoarece $P(0)$ este adevărată. Deci $k > 0$. Cum k este cel mai mic număr pentru care $P(k)$ este falsă, atunci pentru

---

* Textele însemnate cu o bară la marginea paginii sînt facultative.

orice $n < k$, $P(n)$ este adevărată, și din ipoteză, rezultă că $P(n)$ este adevărată și pentru $n = k$. Deci $P(k)$ este în același timp și falsă și adevărată, contradicție. Deci neapărat mulțimea A este vidă. Așadar nu există numere naturale pentru care $P(n)$ este falsă, adică $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural n.

Acest principiu stă la baza unei *variante a metodei de demonstrație prin inducție matematică.*

Fie $P(n)$ o propoziție care depinde de un număr natural $n \geqslant m$, m fiind un număr natural fixat.

Demonstrația prin această variantă a metodei inducției matematice a propoziției $P(n)$ constă din:

1° Se verifică mai întîi că $P(m)$ este adevărată.

2° Se presupune că $P(l)$ este adevărată pentru orice l, unde $m \leqslant l < k$, și se demonstrează că $P(k)$ este adevărată.

Dacă ambele etape ale demonstrației sînt verificate, atunci propoziția $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural $n \geqslant m$.

Exemplu. Să se demonstreze că orice număr natural $n \geqslant 2$, ori este număr prim, ori se descompune în produsul unui număr finit de numere prime.

(Amintim că numărul natural $p \geqslant 2$ se numește prim dacă nu are alți divizori în afară de 1 și p.)

Demonstrație. Folosim metoda inducției matematice (varianta a doua). Notăm cu $P(n)$ propoziția: Numărul $n \geqslant 2$, ori este prim, ori este produs de numere prime.

1° $P(2)$ este adevărată, deoarece $n = 2$ este număr prim.

2° Să presupunem că $P(l)$ este adevărată pentru orice l, $2 \leqslant l < k$, și să demonstrăm că $P(k)$ este adevărată. Într-adevăr, fie numărul natural k. Dacă k este număr prim rezultă că $P(k)$ este adevărată. Dacă k nu este număr prim, atunci $k = ab$, unde $2 \leqslant a, b < k$. După presupunerea noastră $P(a)$ și $P(b)$ sînt adevărate, adică a și b ori sînt prime, ori se descompun în produse de numere prime. Atunci este clar că și $k = ab$ se descompune în produs de numere prime, adică $P(k)$ este adevărată. Conform metodei inducției matematice rezultă că $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural $n \geqslant 2$.

Observație. Am remarcat mai înainte că la baza celui de-al doilea principiu de inducție matematică, care de altfel este echivalent cu primul, stă proprietatea mulțimii numerelor naturale de a fi bine ordonată. Astfel, acest principiu poate fi extins și la alte mulțimi de numere bine ordonate.

De exemplu:

1) O mulțime finită este bine ordonată.

2) Dacă m este un număr întreg oarecare, mulțimea numerelor întregi, x, $x \geqslant m$, este bine ordonată.

Dacă A este o mulțime bine ordonată, putem aplica metoda inducției matematice pentru demonstrarea unei proprietăți $P(x)$, $x \in A$.

Exerciții

1. Folosind metoda inducției matematice, să se demonstreze că pentru orice număr natural n, sînt adevărate egalitățile:

a) $1 + 2 + 3 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

b) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

c) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = n\dfrac{4n^2-1}{3}$;

d) $2^2 + 6^2 + \ldots + (4n-2)^2 = \dfrac{4n(2n-1)(2n+1)}{3}$;

e) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = \left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$;

f) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$;

g) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$;

h) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$;

i) $1 \cdot 4 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 10 + \ldots + n(3n+1) = n(n+1)^2$;

j) $1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \ldots + (-1)^{n-1}n^2 = (-1)^{n-1}\dfrac{n(n+1)}{2}$.

2. Să se demonstreze că:

a) $\dfrac{1}{1 \cdot 4} + \dfrac{1}{4 \cdot 7} + \dfrac{1}{7 \cdot 10} + \ldots + \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \dfrac{n}{3n+1}$;

b) $\dfrac{1}{1 \cdot 5} + \dfrac{1}{5 \cdot 9} + \dfrac{1}{9 \cdot 13} + \ldots + \dfrac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \dfrac{n}{4n+1}$;

c) $\dfrac{1^2}{1 \cdot 3} + \dfrac{2^2}{3 \cdot 5} + \dfrac{3^2}{5 \cdot 7} + \ldots + \dfrac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)}$;

d) $\dfrac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \dfrac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} + \ldots + \dfrac{n}{(2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \dfrac{n(n+1)}{2(2n+1)(2n+3)}$.

3. Să se demonstreze că:

a) $\dfrac{7}{1 \cdot 8} + \dfrac{7}{8 \cdot 15} + \dfrac{7}{15 \cdot 22} + \ldots + \dfrac{7}{(7n-6)(7n+1)} + \dfrac{1}{7n+1} = 1$;

b) $\dfrac{1}{4 \cdot 8} + \dfrac{1}{8 \cdot 12} + \dfrac{1}{12 \cdot 16} + \ldots + \dfrac{1}{4n(4n+4)} + \dfrac{1}{16(n+1)} = \dfrac{1}{16}$.

4. Să se demonstreze că:

a) dacă $n \geqslant 5$, atunci $2^n > n^2$;

b) dacă $n \geqslant 10$, atunci $2^n > n^3$.

5. Să se demonstreze inegalitățile următoare:

a) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{2n} > \dfrac{13}{24}$, pentru $n \geqslant 2$;

b) $\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \ldots + \dfrac{1}{3n+1} > 1$, pentru orice număr natural $n \geqslant 1$;

c) $\dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \dfrac{2n-1}{2n} < \dfrac{1}{\sqrt{2n+1}}$, pentru orice $n \geqslant 1$;

d) $\sqrt{n} < 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$, pentru $n \geqslant 2$.

6. Să se calculeze suma următoare și apoi să se demonstreze prin inducție matematică formula găsită:

$$S_n = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \ldots + n \cdot n!,$$

unde $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$.

7. Să se demonstreze că pentru $n \geqslant 2$ este adevărată inegalitatea:

$$|a_1 + a_2 + \dots + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|.$$

8. Să se calculeze produsul următor și apoi să se demonstreze prin inducție matematică formula găsită:

$$P_n = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\dots\left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \ n \geqslant 2.$$

9. Să se demonstreze prin metoda inducției matematice inegalitatea **(inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski-Schwarz)**:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geqslant (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2,$$

unde $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ sînt numere reale oarecare.

10. Să se demonstreze că pentru orice număr natural n, avem:

a) $n^3 + 11n$ este divizibil cu 6;

b) $7^n - 1$ este divizibil cu 6;

c) $6^{2n-1} + 1$ este divizibil cu 7;

d) $10^n + 18n - 28$ este divizibil cu 27;

e) $9^{n+1} - 8n - 9$ este divizibil cu 16;

f) $7^{2n} - 1$ este divizibil cu 48.

§ 2. Elemente de combinatorică

În practică, adesea, se ajunge la problema de a alege dintr-o mulțime oarecare de obiecte submulțimi de elemente care posedă anumite proprietăți, de a dispune elementele uneia sau ale mai multor mulțimi într-o anumită ordine ș.a.m.d. De asemenea, poate apărea problema determinării numărului tuturor submulțimilor unei mulțimi, constituite după anumite reguli.

Pentru că în astfel de probleme este vorba de anumite combinații de obiecte, ele se numesc probleme combinatorii. Domeniul matematicii în care se studiază astfel de probleme se numește combinatorică. Combinatorica poate fi considerată ca o parte a teoriei mulțimilor, orice problemă de combinatorică putînd fi redusă la o problemă despre mulțimi finite și aplicații.

Această ramură a matematicii are mare importanță pentru teoria probabilităților, cibernetică, logica matematică, teoria numerelor, precum și pentru alte ramuri ale științei și tehnicii. În continuare, vom face cunoștință cu unele probleme simple de combinatorică.

În cuprinsul acestui capitol avem de-a face numai cu mulțimi finite.

2.1. Mulțimi ordonate

Se consideră adesea mulțimi ale căror elemente sînt aranjate într-o ordine determinată. De exemplu, alfabetul este o mulțime ale cărei elemente (litere) sînt date într-o anumită ordine. Astfel cele 27 de litere ale alfabetului românesc sînt aranjate, de obicei, în următoarea ordine: *a* este prima (nu urmează după altă literă), *ă* este a doua (urmează după prima), *b* este a treia (urmează după a doua) ș.a.m.d. pînă la *z* care este ultima (după care nu mai urmează nici o literă). Elementele aceleiași mulțimi se pot da și într-o altă ordine. De exemplu, este posibil ca literele alfabetului să fie aranjate într-o ordine inversă celei dintîi, astfel: prima literă să fie socotită *z*, a doua să fie *x*, ș.a.m.d. pînă la ultima, a 27-a literă, *a*. Sînt, evident, și alte moduri de aranjare a literelor alfabetului.

Spunem că *o mulțime împreună cu o ordine bine determinată de dispunere a elementelor sale este o mulțime ordonată*. Mai precis:

Fie A o mulțime (finită) care are n elemente. Mulțimea A se numește ordonată dacă fiecărui element al său i se asociază un anumit număr de la 1 la n, numit *rangul* elementului, astfel încît la elemente diferite ale lui A corespund numere diferite.

Această asociere exprimă, mai exact, tocmai ordinea elementelor mulțimii A. Astfel, ordinea este următoarea: elementul căruia i se asociază numărul 1, elementul căruia i se asociază numărul 2, ..., elementul căruia i se asociază numărul n.

Observăm că orice mulțime finită poate deveni o mulțime ordonată, adică se poate ordona. Această ordine se poate da, pur și simplu, numerotînd elementele mulțimii. Mulțimea ordonată obținută o notăm cu $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, unde ordinea elementelor este dată de indici.

O mulțime ordonată este caracterizată prin elementele din care este formată și prin ordinea în care sînt considerate acestea.

În consecință, două mulțimi ordonate sînt diferite dacă ele se deosebesc fie prin elementele din care sînt formate, fie prin ordinea lor.

În exemplul de mai sus am considerat, așadar, două mulțimi ordonate diferite.

Un alt exemplu de mulțimi ordonate diferite este următorul: (1, 2, 3) și (2, 1, 3). Mulțimile au aceleași elemente, dar ordinea în care elementele sînt dispuse este diferită în cele două mulțimi. Astfel, în prima mulțime 1 este pe primul loc, 2 pe locul al doilea, iar 3 pe locul al treilea, în timp ce, în a doua mulțime 2 este pe primul loc, 1 pe al doilea, iar 3 pe al treilea.

2.2. Permutări

Fie A o mulțime (finită) cu n elemente. Această mulțime se poate ordona în mai multe moduri. Se obțin, astfel, mulțimi ordonate diferite, care se deosebesc între ele numai prin ordinea elementelor. *Fiecare din mulțimile ordonate care se formează cu cele n elemente ale mulțimii A, se numește* **permutare** *a acestei mulțimi.*

Se mai spune că este o *permutare a elementelor sale* sau, încă, o *permutare de n elemente.*

Numărul permutărilor de n elemente se notează cu P_n și se citește „permutări de n". Avem:

1. O mulțime cu un singur element poate fi ordonată într-un singur mod, deci $P_1 = 1$.

2. O mulțime cu două elemente $A = \{a, b\}$ poate fi ordonată în două moduri. Se obțin două permutări:

$$(a, b) \text{ și } (b, a).$$

Deci $P_2 = 2 = 1 \cdot 2$.

3. Fie o mulțime cu trei elemente $A = \{a, b, c\}$. Permutările acestei mulțimi sînt: (a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a).

Rezultă $P_3 = 6 = 1 \cdot 2 \cdot 3$.

Ne propunem, în continuare, să găsim numărul permutărilor unei mulțimi date, adică numărul modurilor în care poate să fie ordonată o mulțime dată.

Pentru produsul primelor n numere naturale nenule se folosește, de obicei, notația $n!$ care se citește „n factorial":

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!.$$

În ceea ce privește numărul permutărilor, avem:

Teorema 2.2.1. Oricare ar fi $n \geqslant 1$, număr natural, $P_n = n!$ (1)

Demonstrație. Vom demonstra teorema prin metoda inducției matematice. Să notăm cu $P(n)$ egalitatea (1).

1° P(1) este adevărată, deoarece am observat mai înainte că $P_1 = 1 = 1!$.

2° Să arătăm că $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

Să ordonăm în toate modurile posibile o mulțime cu $k+1$ elemente. Oricare din cele $k+1$ elemente ale mulțimii poate ocupa ultimul loc, al $(k+1)$-lea. Se obțin astfel $k+1$ moduri diferite de a ocupa ultimul loc. Să considerăm unul din ele, în care un element ales al mulțimii va avea rangul $k+1$. Elementele rămase, care sînt în număr de k, trebuie să ocupe primele k locuri, iar aceasta se poate face în P_k moduri diferite. Se obțin, așadar, $(k+1)P_k$ moduri de a ordona o mulțime care are $k+1$ elemente. Deci $P_{k+1} = (k+1)P_k$. Dar cum $P(k)$ este adevărată, avem $P_k = k!$ de unde $P_{k+1} = (k+1)k! = (k+1)!$. Conform metodei inducției matematice teorema este demonstrată.

Convenim să considerăm că mulțimea vidă poate fi ordonată într-un singur mod adică $P_0 = 1$. Deci, definim $0! = 1$.

Exemple

1) Să dăm în tabelul următor valorile lui $n!$, pentru $1 \leqslant n \leqslant 10$

n	$n!$	n	$n!$
1	1	6	720
2	2	7	5 040
3	6	8	40 320
4	24	9	362 880
5	120	10	3 628 800

2) Cîte numere diferite se pot forma din cifrele:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

astfel ca orice număr să conțină toate cifrele și doar o singură dată fiecare cifră?

Soluție. Din numărul mulțimilor ordonate care au ca elemente cele 10 cifre trebuie să scădem pe cele care au pe primul loc cifra 0.

Deci obținem

$$10! - 9! = 9 \cdot 9! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9^2 = 3\,265\,920$$

numere.

3) În cîte moduri poate fi ordonată mulțimea $\{1, 2, 3, \ldots, 2n\}$ astfel încît fiecare număr par să aibă rang par?

Soluție. Fiind n locuri de rang par, rezultă că numerele pare de la 1 la $2n$, care sînt tot în număr de n, se pot așeza pe locuri de rang par în $n!$ moduri. Fiecărui astfel de mod de aranjare a numerelor pare îi corespund $n!$ moduri de aranjare a numerelor impare pe locuri de rang impar. De aceea numărul total al permutărilor de tipul cerut este egal cu $n! \cdot n! = (n!)^2$.

2.3. Aranjamente

1. Fie dată o mulțime A cu n elemente. Dacă $m \leqslant n$, atunci se pot forma diferite mulțimi ordonate cu cîte m elemente fiecare, în care intră numai elemente ale mulțimii A. De exemplu, din elementele mulțimii $\{a, b, c, d\}$ se pot constitui 12 mulțimi ordonate, avînd cîte două elemente fiecare:

$$\begin{matrix} (a, b), & (a, c), & (a, d), \\ (b, a), & (b, c), & (b, d), \\ (c, a), & (c, b), & (c, d), \\ (d, a), & (d, b), & (d, c). \end{matrix}$$

Mulțimile ordonate care se formează cu elementele unei submulțimi oarecare a unei mulțimi finite A, se numesc *submulțimi ordonate* ale lui A, sau *aranjamente*. Mai precis:

Dacă A este o mulțime cu n elemente, atunci submulțimile ordonate ale lui A, avînd fiecare cîte k elemente, unde $0 \leqslant k \leqslant n$, se numesc **aranjamente de n elemente luate cîte k.**

Observăm că două aranjamente de n elemente luate cîte k se deosebesc prin *natura* elementelor ori prin *ordinea* lor. Numărul aranjamentelor de n elemente luate cîte k se notează A_n^k și se citește „aranjamente de n luate cîte k".

Din exemplul de mai înainte rezultă:

$$A_4^2 = 12.$$

Ne propunem, în continuare, să găsim o formulă pentru calculul numărului A_n^k. Observăm că $A_n^1 = n$.

Într-adevăr, un element din cele n elemente poate fi ales în n moduri, iar cu acest element ales se formează o singură mulțime ordonată.

Formula care exprimă A_n^k în funcție de n și k, este dată de următoarea teoremă.

Teorema 2.3.1. Dacă k și n sînt numere naturale astfel încît $0 < k < n$, atunci:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \ldots (n-k+1). \tag{1}$$

Demonstrație. Să considerăm mai întîi $0 < k < n$ și să arătăm $A_n^{k+1} = (n-k)A_n^k$. Într-adevăr ca să repartizăm oricare $k+1$ elemente, luate din n elemente date, pe $k+1$ locuri, se pot lua mai întîi oricare k elemente și aranja pe primele k locuri. Aceasta se poate face în A_n^k moduri. În fiecare din aceste cazuri rămîn $(n-k)$ elemente. Oricare din aceste elemente se poate pune pe al $(k+1)$-lea loc. Astfel, în fiecare din cele A_n^k moduri de aranjare a elementelor pe primele k locuri, obținem $(n-k)$ posibilități prin care al $(k+1)$-lea loc este ocupat de unul din cele $(n-k)$ elemente rămase. Prin urmare, avem $A_n^{k+1} = (n-k)A_n^k$.

Avînd în vedere că $A_n^1 = n$, deducem succesiv:

$$A_n^2 = n(n-1),\ A_n^3 = n(n-1)(n-2),$$

$$A_n^k = n(n-1)(n-2) \ldots (n-k+1).$$

Să dăm o altă formă formulei (1). Produsul $n(n-1) \ldots (n-k+1)$ se poate scrie sub forma:

$$\frac{n(n-1) \ldots (n-k+1)(n-k) \ldots 2 \cdot 1}{(n-k) \ldots 2 \cdot 1},$$

adică sub forma $\dfrac{n!}{(n-k)!}$. Deci

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{2}$$

Pentru $k = 0$ formula (2) dă

$$A_n^0 = 1.$$

Acest lucru este adevărat, deoarece orice mulțime conține mulțimea vidă, despre care am convenit s-o considerăm ordonată într-un singur mod.

Pentru $k = n$ formula (2) dă

$$A_n^n = n! = P_n.$$

Așadar formulele (1) și (2) sînt adevărate pentru orice k, astfel încît $0 \leqslant k \leqslant n$.

Exemple

1) În cîte moduri pot fi așezați 4 elevi pe 25 de locuri?

Soluție. Numărul căutat este egal cu

$$A_{25}^4 = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 303\,600.$$

2) Cîte numere naturale nenule diferite se pot forma cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4, dacă în fiecare astfel de număr, orice cifră intră cel mult o dată.

Soluție. Cu 5 cifre se pot forma $A_5^5 = 5!$ aranjamente diferite. Dar aranjamentele care încep cu 0, în număr de A_4^4, dau numere de 4 cifre. Așadar sînt

$$A_5^5 - A_4^4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 - 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$$

numere cu 5 cifre. Numărul numerelor cu 4 cifre care se pot forma cu cifrele 0, 1, 2, 3, 4, este egal cu A_5^4, din care scădem numărul aranjamentelor care încep cu 0, care este egal cu A_4^3. Deci numere cu 4 cifre sînt în număr de

$$A_5^4 - A_4^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96.$$

În mod analog, numărul numerelor diferite de 3 cifre, 2 cifre și o cifră va fi respectiv:

$$A_5^3 - A_4^2 = 48, \quad A_5^2 - A_4^1 = 16 \text{ și } 4.$$

Deci se pot forma 260 numere.

2. *Aplicație la numărul funcțiilor injective și bijective*

Să notăm $N_m = \{1, 2, ..., m\}$.

Să presupunem că B este o mulțime cu n elemente ($m \leqslant n$). Atunci fiecărei funcții injective $f : N_m \to B$ îi corespunde o submulțime ordonată a lui B, care este formată din elementele $b_1 = f(1)$, $b_2 = f(2)$, ..., $b_m = f(m)$ (toate aceste elemente sînt diferite între ele, după injectivitatea funcției f). Invers, fiecare submulțime ordonată, avînd m elemente, a lui B, definește o funcție injectivă f de la N_m la B, prin care $f(k) = b_k$.

Este clar că în loc de N_m se poate lua orice mulțime A cu m elemente.

Astfel, *numărul funcțiilor injective definite pe o mulțime A cu m elemente cu valori într-o mulțime B cu n elemente* ($m \leqslant n$), *este egal cu numărul submulțimilor ordonate, avînd cîte m elemente, ale lui B, adică cu* A_n^m.

Dacă $m = n$, *adică A și B au același număr n de elemente, atunci orice funcție* $f : A \to B$ *care este injectivă, este neapărat bijectivă.*

Rămîne de arătat că f este surjectivă. Să presupunem prin absurd că f nu este surjectivă. Deoarece f este injectivă, adică la elemente diferite din mulțimea A corespund prin f elemente diferite din mulțimea B rezultă că mulțimea $f(A) = \{f(x) | x \in A\}$ are n elemente. Deoarece f nu este surjectivă, există un element $b \in B$ astfel încît $f(a) \neq b$ pentru orice $a \in A$. Deci $b \notin f(A)$ și astfel $f(A)$ are mai puțin de n elemente; contradicție. Această contradicție arată că f este neapărat surjectivă. Deci f este injectivă și surjectivă, adică bijectivă.

Avînd în vedere cele de mai înainte, rezultă că *numărul funcțiilor bijective definite pe o mulțime A cu n elemente cu valori într-o mulțime B tot cu n elemente este egal cu* $A_n^n = P_n$, *adică* $n!$.

În particular, dacă $A = B$ rezultă că numărul funcțiilor bijective definite pe o mulțime cu n elemente cu valori în ea însăși este egal cu numărul permutărilor mulțimii A, adică $P_n = n!$.

Din acest motiv, de obicei, o funcție bijectivă definită pe o mulțime cu valori în ea însăși se numește permutare a acestei mulțimi.

2.4. Combinări

1. Fie mulțimea $A = \{a, b, c\}$ și să considerăm toate submulțimile sale. Acestea sînt:

1) mulțimea vidă: $\emptyset$;
2) submulțimi avînd fiecare cîte un element: $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$;
3) submulțimi avînd fiecare cîte două elemente: $\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$;
4) mulțimea totală: $\{a, b, c\}$.

Așadar mulțimea $A = \{a, b, c\}$ are opt submulțimi, dintre care: trei submulțimi cu cîte un element, trei submulțimi cu cîte două elemente, o submulțime cu trei elemente și mulțimea vidă.

În continuare vom rezolva următoarea problemă:

Fiind dată o mulțime finită cu n elemente, să se calculeze numărul submulțimilor sale avînd fiecare cîte k elemente.

Dacă A este o mulțime cu n elemente, atunci submulțimile lui A avînd fiecare cîte k elemente, unde $0 \leqslant k \leqslant n$, *se numesc* **combinări de** n **elemente luate cîte** k. Numărul combinărilor de n elemente luate cîte k se notează C_n^k și se citește „combinări de n luate cîte k"*.

Din exemplul de mai înainte rezultă:

$$C_3^0 = 1,\ C_3^1 = 3,\ C_3^2 = 3,\ C_3^3 = 1,$$

iar $C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 8 = 2^3$ (acesta este numărul tuturor submulțimilor mulțimii $\{a, b, c\}$).

Ne propunem în continuare să găsim o formulă pentru calculul numărului C_n^k.

Observăm că $C_n^0 = 1$ deoarece fiecare mulțime A are numai o submulțime fără nici un element și anume mulțimea vidă. Apoi, $C_n^1 = n$ deoarece o mulțime cu n elemente $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ are exact n submulțimi cu un singur element, adică submulțimile de forma $\{a_1\}$, $\{a_2\}$, ..., $\{a_n\}$. Formula care exprimă C_n^k în funcție de n și k, este dată de următoarea teoremă.

Teorema 2.4.1. Dacă k și n sînt numere naturale, astfel încît $0 \leqslant k \leqslant n$, atunci

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}. \qquad (1)$$

Demonstrație. Fie A o mulțime cu n elemente. Să considerăm toate submulțimile mulțimii A care au k elemente. Ordonăm fiecare dintre aceste submulțimi în toate modurile posibile. Obținem astfel, toate submulțimile ordonate ale lui A, care au cîte k elemente. Numărul lor, după cum știm, este A_n^k. Dar cum numărul tuturor submulțimilor lui A avînd k elemente este egal cu C_n^k, iar fiecare din acestea se pot ordona în P_k moduri, rezultă că $A_n^k = C_n^k \cdot P_k$. Din această egalitate rezultă că

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k}.$$

Înlocuind în această formulă expresiile $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$, $P_k = k!$, obținem

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

ceea ce se mai poate scrie:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

---

* Numărul C_n^k se mai notează $\binom{n}{k}$.

De *exemplu*,

$$C_{25}^4 = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 25 \cdot 23 \cdot 22 = 12\,650.$$

Exemple

1) În cîte moduri se poate alcătui din 9 persoane o comisie formată din 5 membri?

Soluție. Pentru a avea toate cazurile posibile trebuie să considerăm toate submulțimile formate din cîte 5 elemente, ale unei mulțimi formate din 9 elemente. Numărul căutat este

$$C_9^5 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 126.$$

2) La un turneu de șah au participat n șahiști, și fiecare 2 șahiști s-au întîlnit o dată. Cîte partide s-au jucat în turneu?

Soluție. Numărul partidelor este egal cu numărul submulțimilor formate din cîte două elemente ale unei mulțimi cu n elemente, adică

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

3) Să se găsească numărul diagonalelor unui poligon convex cu n laturi.

Soluție. Vîrfurile poligonului formează o mulțime de n puncte în plan, necoliniare cîte 3. Numărul diagonalelor și al laturilor poligonului este egal cu numărul submulțimilor formate din cîte două elemente ale unei mulțimi cu n elemente, adică

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Scăzînd cele n laturi din acest număr, obținem:

$$\frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2},$$

care reprezintă numărul diagonalelor unui poligon conex cu n laturi.

4) În cîte puncte se intersectează diagonalele unui poligon convex cu n laturi, dacă oricare trei dintre ele nu sînt concurente?

Soluție. Fiecărui punct de intersecție a două diagonale îi corespund 4 vîrfuri ale poligonului, iar la oricare 4 vîrfuri ale poligonului le corespunde un punct de intersecție (punctul de intersecție al diagonalelor patrulaterului cu vîrfurile în cele 4 puncte). De aceea numărul tuturor punctelor de intersecție este egal cu numărul posibilităților de a alege 4 vîrfuri din cele n vîrfuri, adică:

$$C_n^4 = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{24}.$$

2. *Cîteva proprietăți ale numerelor C_n^k*

Numerele C_n^k au o serie de proprietăți importante. Ele exprimă diferite relații între submulțimile unei mulțimi. Aceste proprietăți se pot demonstra direct din formula pentru C_n^k. Mai instructive sînt însă demonstrațiile bazate pe raționamente cu mulțimi.

1° *Formula combinărilor complementare. Dacă $0 \leqslant k \leqslant n$, atunci* este *adevărată egalitatea*:

$$C_n^k = C_n^{n-k}. \tag{1}$$

Demonstrație. Cu ajutorul formulei pentru C_n^k avem

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = C_n^{n-k}.$$

Sensul acestei afirmații este următorul. Fie A o mulțime cu n elemente. Fiecărei submulțimi X cu k elemente a lui A îi asociem o submulțime bine determinată, cu $(n-k)$ elemente, a mulțimii A, și anume CX (complementara lui X). Prin această asociere, unei submulțimi cu $(n-k)$ elemente îi corespunde o singură submulțime cu k elemente. Așadar, numărul submulțimilor cu k elemente ale lui A este egal cu numărul submulțimilor sale cu $(n-k)$ elemente. Această afirmație se exprimă, de altfel, prin egalitatea (1).

2° *Pentru orice număr natural $n \geqslant 0$ este adevărată egalitatea*

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n. \tag{2}$$

Demonstrație. Suma din membrul stîng al egalității reprezintă tocmai numărul tuturor submulțimilor unei mulțimi cu n elemente. Egalitatea (2) rezultă din teorema următoare:

Teorema 2. 4. 2. Numărul tuturor submulțimilor unei mulțimi formate din n elemente este egal cu 2^n.

Demonstrație. Vom aplica metoda inducției matematice. Să notăm cu $P(n)$ afirmația teoremei.

1) Afirmația $P(n)$ este adevărată pentru $n = 0$, deoarece mulțimea vidă are o singură submulțime și anume ea însăși.

2) Să demonstrăm că $P(k) \Rightarrow P(k+1)$, adică din aceea că o mulțime formată din k elemente are 2^k submulțimi rezultă că o mulțime formată din $k+1$ elemente are 2^{k+1} submulțimi.

Fie o mulțime B formată din $k+1$ elemente:

$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k, b_{k+1}\}$$

și fie următoarea submulțime a lui B:

$$B' = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}.$$

Cum $P(k)$ este adevărată, rezultă că B' are 2^k submulțimi. Din fiecare submulțime a lui B' se obține o nouă submulțime a lui B prin adăugarea elementului b_{k+1}, deci se obțin astfel, încă 2^k submulțimi ale lui B. În total sînt deci $2^k + 2^k = 2^{k+1}$ submulțimi ale mulțimii B. Conform metodei inducției matematice teorema este demonstrată.

3°. *Formula de recurență pentru calculul numărului de combinări. Pentru orice k și n astfel încît $0 \leqslant k < n$, este adevărată egalitatea*:

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}. \tag{3}$$

Demonstrație. Cu ajutorul formulei pentru C_n^k, avem

$$C_{n-1}^k = \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} = \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!}$$

$$C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-1)!k}{k!(n-k)!}.$$

Înlocuind aceste valori în partea din dreapta a formulei (3), obținem

$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = \frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!} + \frac{(n-1)!k}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!(n-k+k)}{k!(n-k)!} =$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_n^k.$$

Egalitatea (3) este demonstrată.

Să dăm o altă demonstrație formulei (3) făcînd un raționament cu mulțimi. Să considerăm un element oarecare a al unei mulțimi A, formată din n elemente și toate submulțimile mulțimii A, formate din cîte k elemente. Numărul acestor submulțimi este egal cu C_n^k. Submulțimile cu k elemente ale lui A le împărțim în două clase (disjuncte): submulțimi care conțin pe a și submulțimi care nu conțin pe a. Numărul submulțimilor din prima clasă este egal cu C_{n-1}^{k-1}, deoarece fiecare astfel de submulțime se obține prin adăugarea elementului a la o submulțime oarecare cu $(k-1)$ elemente, a mulțimii A. Numărul submulțimilor din a doua clasă este egal cu C_{n-1}^k, deoarece fiecare astfel de submulțime este o submulțime cu k elemente, a mulțimii $A - \{a\}$. Deci:

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k.$$

4° *Triunghiul lui Pascal**. Formula (3) a punctului precedent permite să calculăm C_n^k, știind C_{n-1}^k și C_{n-1}^{k-1}. Cu ajutorul ei se pot calcula succesiv numerele C_n^k, mai întîi pentru $n = 0$, apoi pentru $n = 1$, pentru $n = 2$ ș.a.m.d. Valorile numerelor C_n^k le scriem sub forma unui tabel triunghiular care se numește *triunghiul lui Pascal*:

1	$n = 0$
1 1	$n = 1$
1 2 1	$n = 2$
1 3 3 1	$n = 3$
1 4 6 4 1	$n = 4$
1 5 10 10 5 1	$n = 5$

În linia a $(n+1)$-a a tabelului sînt așezate în ordine numerele $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^n$. Avem $C_n^0 = C_n^n = 1$, iar numerele rămase se calculează cu ajutorul formulei de recurență.

Întrucît numerele C_{n-1}^{k-1} și C_{n-1}^k sînt dispuse în acest tabel în linia precedentă celei în care se găsește C_n^k, la stînga și la dreapta acestuia, atunci pentru a obține C_n^k adunăm numerele din linia precedentă care se găsesc la stînga și la dreapta sa. De exemplu, numărul 10 din linia a șasea se obține adunînd numerele 4 și 6 din linia precedentă.

3. *O interpretare geometrică pentru numerele* C_n^k

Fie numerele naturale k și n astfel încît $0 \leqslant k \leqslant n$. În continuare se va da o interpretare geometrică interesantă a numărului C_n^k.

Fie planul xOy și punctul $M(k, n-k)$. Notăm cu M' și M'', punctele de coordonate $(k, 0)$, respectiv $(0, n-k)$. Realizăm rețeaua din figura II.1, cu pătrate de latură 1 (adică, un caroiaj al dreptunghiului $OM'MM''$ cu pătrate de latură 1). Acestea sînt în număr de $k \cdot (n-k)$.

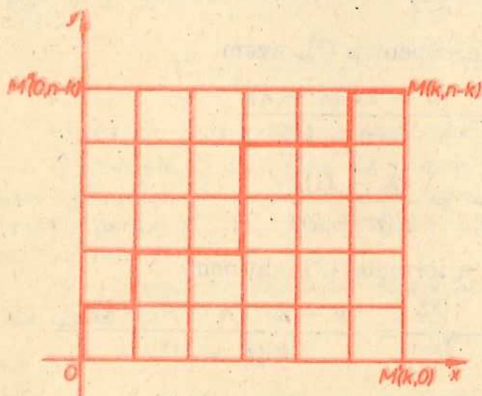


Fig. II.1

Vîrfurile celor $k \cdot (n-k)$ pătrate se numesc nodurile rețelei. Numim *drum pe rețea* o linie frîntă care unește două noduri oarecare ale rețelei și este formată din laturi succesive ale pătratelor rețelei.

Se pune problema determinării numărului drumurilor pe rețea *minimale (cele mai scurte)* care unesc punctul $O(0, 0)$ cu punctul $M(k, n-k)$.

Se observă că un drum pe rețea minimal, care unește O cu M, este format din $k + (n - k) = n$ segmente (de lungime 1), dintre care k segmente orizontale și $(n-k)$ segmente verticale. Drumurile diferă între ele doar prin ordinea de succesiune a segmentelor orizontale

* Blaise Pascal (1623—1662), matematician francez.

și verticale. De aceea numărul tuturor acestor drumuri este egal cu numărul tuturor posibilităților prin care din n segmente se pot alege k segmente orizontale, adică C_n^k.

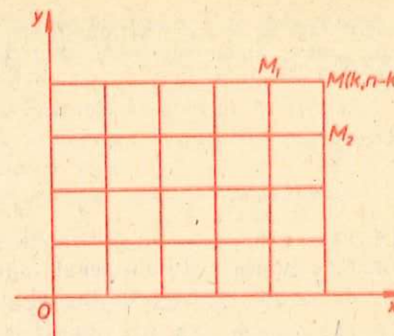


Fig. II.2

Remarcăm că n este suma coordonatelor punctului M.

S-ar putea considera numărul posibilităților de alegere a $(n-k)$ segmente verticale din cele n segmente și atunci obținem numărul C_n^{n-k}.

Astfel, am stabilit geometric formula combinărilor complementare: $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Să demonstrăm în același fel formula de recurență pentru calculul numărului de combinări.

Să considerăm rețeaua din figura II.2, pe care figurăm punctele $M_1(k-1, n-k)$ și $M_2(k, n-k-1)$.

Rezultă că numărul tuturor drumurilor minimale care unesc $O(0, 0)$, cu $M(k, n-k)$ este C_n^k. Toate aceste drumuri le împărțim în două clase (disjuncte): drumuri care trec prin punctul M_1 și drumuri care trec prin punctul M_2. Cum suma coordonatelor fiecăruia din punctele M_1 și M_2 este $n - 1$ rezultă că numărul drumurilor care trec prin M_1 este C_{n-1}^k, iar numărul drumurilor care trec prin M_2 este C_{n-1}^{k-1}, de unde rezultă

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.$$

Exerciții

Permutări

1. Din elementele mulțimii A să se formeze toate permutările posibile, dacă:

a) $A = \{2\}$; c) $A = \{\alpha, \beta, \gamma\}$;

b) $A = \{4, 5\}$; d) $A = \{a, b, c, d\}$.

2. Să se simplifice expresiile:

a) $6! + 7!$; b) $9! - 8!$; c) $\frac{213!}{210!}$; d) $\frac{n!}{(n-2)!}$; e) $\frac{(n-3)!}{(n-5)!}$; f) $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+2)!}$.

3. Să se rezolve ecuațiile:

a) $\frac{(n+2)!}{n!} = 72$; b) $\frac{n!}{(n-4)!} = \frac{12n!}{(n-2)!}$; c) $\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n+1)!} = \frac{n^3}{(n+2)!}$.

4. Să se rezolve inecuațiile:

a) $\frac{(n-1)!}{(n-3)!} < 72$; b) $\frac{(n+2)!}{(n+1)(n+2)} < 1\,000$.

5. În cîte moduri se pot așeza pe un raft patru cărți?

6. Un tren de persoane are zece vagoane. În cîte moduri pot fi așezate vagoanele pentru formarea trenului?

7. În cîte moduri poate fi ordonată mulțimea $\{1, 2, \ldots, n\}$, astfel ca numerele 1, 2, 3 să stea la rînd și în ordine crescătoare?

8. Fie dată o mulțime A cu m elemente și o mulțime B cu n elemente. Să se găsească numărul de permutări al mulțimii $A \cup B$, astfel încît primul element al unei astfel de permutări să fie din A, iar ultimul să fie din B. $A \cap B = \emptyset$.

9. Cîte elemente trebuie să conțină o mulțime, astfel încît numărul permutărilor acestei mulțimi să fie cuprins între 500 și 1 000?

10. Din cifrele 0, 1, 2, 3, 4, 5 se formează toate numerele cu șase cifre astfel încît în fiecare număr să nu fie cifre identice. Cîte numere se pot obține?

11. În cîte moduri pot fi așezate n persoane la o masă circulară?

Aranjamente

12. Să se scrie toate aranjamentele de cîte 4 elemente ale mulțimii $\{a, b, c, d, e\}$.

13. Cîte numere naturale nenule diferite se pot forma cu cifrele 0, 1, 2, 3, dacă în fiecare astfel de număr, orice cifră intră cel mult o dată.

14. O grupă de studenți trebuie să programeze patru examene în timp de opt zile. În cîte moduri se poate face aceasta? Dar dacă ultimul examen se va da în mod obligatoriu în ziua a opta?

15. Cei treizeci elevi ai unei clase au schimbat fotografii între ei. Cîte fotografii au fost necesare?

16. Să se calculeze:

a) $\dfrac{A_n^6 + A_n^5}{A_n^4}$; b) $\dfrac{A_{n+k}^{k+3} + A_{n+k}^{k+2}}{A_{n+k}^{k+1} - A_{n+k}^{k}}$; c) $\dfrac{(2n+1)!A_{2n}^{k}}{A_{2n-1}^{k-1}\cdot(2n-k)!}$.

17. Să se afle n, dacă:

a) $A_n^5 = 18A_{n-2}^4$; b) $\dfrac{A_n^{10} - A_n^8}{A_n^8} = 109$; c) $\dfrac{(n+2)!}{A_n^k\cdot(n-k)!} = 132$.

18. Știind că numărul aranjamentelor de n elemente luate cîte k este egal cu de p ori numărul aranjamentelor de n elemente luate cîte $k - 2$, să se găsească n.

Combinări

19. Să se scrie toate submulțimile mulțimii A și să se găsească numărul lor, dacă:

a) $A = \{3, 4\}$; b) $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$.

20. În cîte moduri, din 30 elevi, poate fi ales un comitet format din 3 elevi?

21. Fiind date n puncte, astfel încît oricare trei dintre ele nu sînt coliniare, să se găsească numărul dreptelor care se pot duce unind punctele două cîte două.

22. Cîte numere de cîte patru cifre se pot forma astfel încît în fiecare număr o cifră să fie mai mare decît precedenta? Dar dacă fiecare cifră este mai mică decît precedenta?

23. În plan sînt date n puncte, din care în afară de k puncte care sînt situate pe aceeași dreaptă, oricare trei puncte nu sînt coliniare. Se cere să se afle:
a) Prin cîte drepte se pot uni aceste puncte?
b) Cîte triunghiuri diferite, cu vîrfurile în aceste puncte, există?

24. În cîte moduri se pot forma echipe din cîte 4 elevi și un profesor, dacă sînt 20 de elevi și 3 profesori?

25. La 9 clase trebuie repartizați 3 profesori de matematică fiecăruia repartizîndu-i-se cîte 3 clase. În cîte moduri se poate face repartizarea?

26. Să se calculeze:

a) C_{10}^8; c) C_{n+1}^{k+1}; e) C_{n-k}^{k+1};

b) C_{16}^{13}; d) $C_{100}^{0} + C_{100}^{99}$; f) $C_{10}^2 + C_{10}^8$;

27. Să se afle n, dacă:

a) $C_n^4 = \dfrac{5n(n-3)}{6}$; c) $C_{4n+9}^{4(n+1)} = 5A_{4n+7}^3$;

b) $C_n^3 + C_n^4 = n(n-2)$; d) $C_{n+8}^{n+3} = 5A_{n+6}^3$.

28. Se dă o mulțime A care are n elemente. Împărțim toate submulțimile lui A în clase (disjuncte), punînd în aceeași clasă toate submulțimile lui A care au același număr de elemente. Care din aceste clase este cea mai numeroasă?

29. Să se rezolve inecuațiile:

a) $C_n^5 < C_n^6$; c) $C_{20}^{k-1} < C_{20}^{k}$;

b) $C_n^5 > C_n^7$; d) $C_{16}^{k-2} > C_{16}^{k}$.

30. Să se rezolve sistemele de ecuații:

a) $\begin{cases} A_x^y = 7A_x^{y-1} \\ 6C_x^y = 5C_x^{y+1} \end{cases}$; b) $\begin{cases} xC_{n-2}^{k-1} + \dfrac{n-1}{k-1}\,y = \dfrac{k}{n-1} \\ xC_{n-2}^{k-2} - \dfrac{n-1}{k}\,y = \dfrac{k-1}{n-1} \end{cases}$.

31. Să se deducă egalitățile:

a) $C_n^k = C_{n-2}^k + 2C_{n-2}^{k-1} + C_{n-2}^{k-2}$;

b) $C_n^k = C_{n-3}^k + 3C_{n-3}^{k-1} + 3C_{n-3}^{k-2} + C_{n-3}^{k-3}$;

c) $C_9^9 + C_{10}^9 + C_{11}^9 + \ldots + C_{20}^9 = C_{21}^{10}$.

2. Din 11 persoane, dintre care 7 bărbați și 4 femei, se formează o delegație alcătuită din 5 persoane dintre care cel puțin două femei. În cîte moduri se poate forma această delegație?

§ 3. Binomul lui Newton și aplicații

3.1. Binomul lui Newton

Dacă a și b sînt numere, sînt bine cunoscute formulele:

$$(a+b)^1 = a + b,$$
$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$
$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

De asemenea, se calculează fără dificultate

$$(a+b)^4 = (a+b)^2(a+b)^2 \quad \text{și} \quad (a+b)^5 = (a+b)^2(a+b)^3$$

și se obține

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Observăm că, coeficienții din membrii din dreapta ai acestor formule sînt egali cu numerele din linia corespunzătoare a triunghiului lui Pascal (vezi § 2, pct. 2.4).

Vom arăta că pentru orice număr natural n este adevărată formula

$$(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + \ldots + C_n^m a^{n-m}b^m + \ldots + C_n^n b^n, \qquad (1)$$

care se numește *formula lui Newton**. Membrul drept al egalității (1) se numește *dezvoltarea binomului la putere*.

Vom demonstra formula (1) prin metoda inducției matematice.

Notăm cu $P(n)$ egalitatea (1), pentru un n dat.

---

* Isaac Newton, matematician și fizician englez a trăit între anii 1643—1727.

1) $P(1)$ este adevărată, deoarece

$$(a + b)^1 = a + b = C_1^0 a + C_1^1 b.$$

2) Rămîne să arătăm că pentru orice număr natural $k \geqslant 1$, avem $P(k) \Rightarrow P(k+1)$.

Fie deci adevărată $P(k)$, adică

$$(a + b)^k = C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b + \ldots + C_k^m a^{k-m} b^m + \ldots + C_k^k b^k.$$

Să arătăm că este adevărată $P(k + 1)$. Într-adevăr, avem

$$(a + b)^{k+1} = (a + b)^k (a + b) = (C_k^0 a^k + C_k^1 a^{k-1} b + \ldots + C_k^m a^{k-m} b^m +$$
$$+ \ldots + C_k^k b^k)(a + b) = C_k^0 a^{k+1} + C_k^1 a^k b + \ldots + C_k^{m+1} a^{k-m} b^{m+1} + \ldots +$$
$$+ C_k^k a b^k + C_k^0 a^k b + \ldots + C_k^m a^{k-m} b^{m+1} + \ldots + C_k^{m-1} a b^k + C_k^k b^{k+1} =$$
$$= C_k^0 a^{k+1} + (C_k^0 + C_k^1) a^k b + \ldots + (C_k^m + C_k^{m+1}) a^{k-m} b^{m+1} + \ldots +$$
$$+ (C_k^{k-1} + C_k^k) a b^k + C_k^k b^{k+1}.$$

Deoarece

$$C_k^0 = 1 = C_{k+1}^0,\ C_k^0 + C_k^1 = C_{k+1}^1, \ldots, C_k^m + C_k^{m+1} = C_{k+1}^{m+1}, \ldots$$
$$\ldots, C_k^{k-1} + C_k^k = C_{k+1}^k,\ C_k^k = 1 = C_{k+1}^{k+1},$$

obținem:

$$(a + b)^{k+1} = C_{k+1}^0 a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^k b + \ldots + C_{k+1}^{m+1} a^{k-m} b^{m+1} + \ldots$$
$$\ldots + C_{k+1}^k a b^k + C_{k+1}^{k+1} b^{k+1}.$$

Folosind metoda inducției matematice, urmează că $P(n)$ ete adevărată pentru orice număr natural $n \geqslant 1$. Formula lui Newton este astfel demonstrată.

Exemplu. $(a + b)^6 = C_6^0 a^6 + C_6^1 a^5 b + C_6^2 a^4 b^2 + C_6^3 a^3 b^3 + C_6^4 a^2 b^4 + C_6^5 a b^5 + C_6^6 b^6$.

Avem:

$$C_6^0 = 1 = C_6^6;\ C_6^1 = \frac{6}{1} = 6;\ C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15;\ C_6^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20.$$

$C_6^4 = C_6^2 = 15$ (fiind combinări complementare).

$C_6^5 = C_6^1 = 6$ (fiind combinări complementare).

Deci:

$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5 b + 15a^4 b^2 + 20a^3 b^3 + 15a^2 b^4 + 6ab^5 + b^6.$$

Coeficienții C_n^0, C_n^1, $C_n^2, \ldots$, C_n^n din formula lui Newton se numesc *coeficienți binomiali*. Aceștia sînt, evident, în număr de $n + 1$.

Asupra formulei lui Newton facem cîteva observații de bază.

1. În dezvoltarea $(a + b)^n$, după formula lui Newton, sînt $n + 1$ termeni (numărul termenilor fiind egal cu numărul coeficienților binomiali C_n^0, C_n^1, $C_n^2, \ldots$, C_n^n).

2. În formula lui Newton exponenții puterilor lui a descresc de la n la 0, iar exponenții puterilor lui b cresc de la 0 la n. Suma exponenților puterilor lui a și b în orice termen al dezvoltării este egală cu n, adică este egală cu exponentul puterii binomului.

3. Coeficienții binomiali din dezvoltare egal depărtați de termenii extremi ai dezvoltării, sînt egali între ei, deoarece $C_n^m = C_n^{n-m}$ (fiind combinări complementare).

4. Dacă n este un număr par (adică $n = 2k$), atunci coeficientul binomial al termenului din mijloc al dezvoltării (adică C_n^k) este cel mai mare. Dacă n este impar (adică $n = 2k + 1$), atunci coeficienții binomiali ai celor doi termeni de la mijloc sînt egali între ei (adică $C_n^k = C_n^{k+1}$) și sînt cei mai mari.

5. Termenul $C_n^k a^{n-k} b^k$, adică al $(k + 1)$-lea termen din egalitatea (1), se numește termenul de rang $k + 1$ și se notează cu T_{k+1}. Așadar

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k,\ k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Termenul T_{k+1} se mai numește *termenul general al dezvoltării*, deoarece dînd lui k valori de la 0 la n, găsim toți termenii dezvoltării.

De *exemplu*, $T_1 = C_n^0 a^n b^0 = C_n^0 a^n$ este primul termen, $T_2 = C_n^1 a^{n-1} b$ este al doilea termen, $T_3 = C_n^2 a^{n-2} b^2$ este al treilea termen etc.

Se poate stabili și o relație de recurență între termenii succesivi ai dezvoltării (1).

Avînd în vedere că

$$C_n^{k+1} = \frac{n - k}{k + 1} C_n^k$$

rezultă că

$$T_{k+2} = C_n^{k+1} a^{n-k-1} b^{k+1} = \frac{n - k}{k + 1} C_n^k a^{n-k} b^k \frac{b}{a} = \frac{n - k}{k + 1} \cdot \frac{b}{a} \cdot T_{k+1}.$$

Deci

$$T_{k+2} = \frac{n - k}{k + 1} \cdot \frac{b}{a} \cdot T_{k+1}. \quad (3)$$

Observație. Să se facă distincție între *coeficientul unui termen al dezvoltării* după formula lui Newton și *coeficientul binomial al aceluiași termen*. De *exemplu*, în dezvoltarea

$$(a + 2b)^4 = a^4 + 8a^3 b + 24a^2 b^2 + 32ab^3 + 16b^4$$

coeficientul celui de-al patrulea termen al dezvoltării este 32, iar coeficientul său binomial este $C_4^3 = 4$.

Să dăm în continuare cîteva *exemple* și *aplicații*.

1) Să se găsească termenul al cincilea al dezvoltării

$$(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x^2})^{10}.$$

Soluție. Termenul căutat îl găsim folosind formula (2)

$$T_5 = C_{10}^4 (\sqrt{x})^{10-4} (\sqrt[3]{x^2})^4 = 210 x^5 \sqrt[3]{x^2}.$$

2) Să se găsească rangul termenului care conține pe x^7 din dezvoltarea

$$\left(\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{2}\sqrt{x}\right)^{12}.$$

Soluție. Scriem termenul general al dezvoltării

$$T_{k+1} = C_{12}^k (\sqrt[3]{x^2})^{12-k} \left(\frac{1}{2}\sqrt{x}\right)^k.$$

Punem condiția ca în T_{k+1} să apară x^7, adică $(\sqrt[3]{x^2})^{12-k} (\sqrt{x})^k = x^7$.

Deci $x^{\frac{2(12-k)}{3}} x^{\frac{k}{2}} = x^7$, de unde $\frac{2(12 - k)}{3} + \frac{k}{2} = 7$, care dă $k = 6$.

3) Să se determine al 12-lea termen al dezvoltării $\left(x - \frac{1}{\sqrt{5x}}\right)^n$, dacă coeficientul binomial al celui de-al treilea termen este egal cu 105.

Soluție. Coeficientul binomial al termenului al treilea este C_n^2. Avem $C_n^2=105$, adică $\frac{n(n-1)}{2} = 105$, de unde $n_1 = 15$ și $n_2 = -14$. Cum n este pozitiv, rezultă că $n = 15$. Deci

$$T_{12} = (-1)^{11}C_{15}^{11}x^{11}\left(\frac{1}{\sqrt{5x}}\right)^4 = -C_{15}^{4}x^{11}\frac{1}{5^2x^2} = -\frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5^2}x^9 = -\frac{273}{5}x^9.$$

4) Să se găsească rangul celui mai mare termen în dezvoltarea $(1 + 0{,}1)^{100}$.

Soluție. După formula (3) rezultă $\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}} = \frac{100-k}{k+1} \cdot \frac{0{,}1}{1} = \frac{100-k}{10(k+1)}$.

Avem că $\frac{100-k}{10(k+1)} \geqslant 1$ dacă și numai dacă $k \leqslant 8\frac{2}{11}$.

Deci pentru $k \leqslant 8$ rezultă $\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}} > 1$, iar pentru $k \geqslant 9$ rezultă $\frac{T_{k+2}}{T_{k+1}} < 1$. Așadar termenii dezvoltării cresc pînă la T_{10} și după aceea descresc, adică T_{10} este cel mai mare termen al dezvoltării.

3.2. Aplicații. Identități în calculul cu combinări

Numerele C_n^k au o serie de proprietăți interesante. Indicăm mai jos cîteva dintre acestea și stabilim o serie de identități pe care le verifică coeficienții binomiali.

Amintim mai întîi următoarele formule:

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \tag{1}$$

$$C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}, \tag{2}$$

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n, \tag{3}$$

care au fost stabilite în paragraful 2.4 din acest capitol.

Observăm că egalitatea (3) se obține evident și din formula binomului lui Newton,

$$(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^nb^n,$$

pentru $a = b = 1$.

Dacă în formula binomului lui Newton se pune $a = 1$, $b = -1$, se obține egalitatea:

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^nC_n^n = 0. \tag{4}$$

Pe baza egalităților (3) și (4) rezultă

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = 2^{n-1}. \tag{5}$$

Deci, *suma coeficienților binomiali ai termenilor de rang impar este egală cu suma coeficienților bonomiali ai termenilor de rang par.*

Vom stabili în continuare alte cîteva formule combinatorii importante. Uneori, pentru demonstrația anumitor egalități este util să se aibă în vedere interpretarea geometrică a numărului C_n^k, care a fost dată în paragraful 2.4 din acest capitol.

1. Să se demonstreze că

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \ldots + C_{k-1}^{k-1}. \tag{6}$$

Demonstrație. Folosind egalitatea (2), scriem șirul următor de egalități

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1},$$
$$C_{n-1}^k = C_{n-2}^k + C_{n-2}^{k-1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$C_{k+1}^k = C_k^k + C_k^{k-1},$$
$$C_k^k = C_{k-1}^{k-1}\ (= 1).$$

Adunînd membru cu membru aceste egalități, după reducerea termenilor asemenea, obținem egalitatea (6).

2. Să se demonstreze că

$$C_n^0C_m^k + C_n^1C_m^{k-1} + \ldots + C_n^kC_m^0 = C_{n+m}^k. \tag{7}$$

Demonstrația 1. Toate submulțimile cu k elemente ale mulțimii

$$A = \{a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}, \ldots, a_m\},$$

al căror număr este C_{n+m}^k, le împărțim în $k+1$ clase $T_1, T_2, \ldots, T_{k+1}$ astfel: T_i este formată din toate submulțimile lui A cu k elemente, în componența cărora intră exact i elemente cu indici $\leqslant n$. Fiecare submulțime din clasa T_i se poate obține, reunind o submulțime oarecare cu i elemente a mulțimii $\{a_1, \ldots, a_n\}$ cu o submulțime oarecare cu $(k-i)$ elemente a mulțimii $\{a_{n+1}, \ldots, a_{n+m}\}$. Deci, T_i este formată din $C_n^iC_m^{k-i}$ submulțimi. Cum $T_1, T_2, \ldots, T_{k+1}$ sînt disjuncte două cîte două, iar reuniunea tuturor este totalitatea submulțimilor, cu k elemente, ale mulțimii A, rezultă

$$C_{n+m}^k = \sum_{i=0}^{k} C_n^iC_m^{k-i}.$$

Demonstrația 2. Să considerăm egalitatea

$$(1+x)^n(1+x)^m = (1+x)^{n+m}.$$

Folosind formula binomului lui Newton, deducem coeficientul lui x^k din membrul drept al acestei egalități ca fiind C_{m+n}^k, iar coeficientul lui x^k din membrul stîng al egalității este

$$C_n^0C_m^k + C_n^1C_m^{k-1} + \ldots + C_n^kC_m^0.$$

După cum se va argumenta în Capitolul IV al manualului, coeficienții lui x^k din cei doi membri sînt egali, de unde rezultă egalitatea (7).

Dacă în (7), $k = n = m$ și ținem seama de formula (1), rezultă

$$(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n. \tag{8}$$

3. Să se demonstreze că

$$C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right). \tag{9}$$

Demonstrație. Fie

$$\varepsilon = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$$

o rădăcină cubică complexă a unității. Avem deci $\varepsilon^3 = 1$ și $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$.

Punînd în formula binomului lui Newton $a = 1$, $b = 1$, apoi $a = 1$, $b = \varepsilon$ și, în sfîrșit, $a = 1$, $b = \varepsilon^2$, obținem:

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + C_n^4 + \ldots,$$
$$(1+\varepsilon)^n = C_n^0 + \varepsilon C_n^1 + \varepsilon^2C_n^2 + C_n^3 + \varepsilon C_n^4 + \ldots$$
$$(1+\varepsilon^2)^n = C_n^0 + \varepsilon^2C_n^1 + \varepsilon C_n^2 + C_n^3 + \varepsilon^2C_n^4 + \ldots$$

Adunînd, termen cu termen, aceste trei egalități și împărțind la 3, obținem în membrul drept $C_n^0 + C_n^3 + C_n^6 + \ldots$, iar în membrul stîng

$$\frac{1}{3}[2^n + (1+\varepsilon)^n + (1+\varepsilon^2)^n].$$

Ținînd seama de faptul că

$$1 + \varepsilon = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} \text{ și}$$

$$1 + \varepsilon^2 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

obţinem

$$\frac{1}{3}[2^n + (1+\varepsilon)^n + (1+\varepsilon^2)^n] = \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\frac{n\pi}{3}\right),$$

de unde rezultă egalitatea (9).

Lăsăm ca exerciţiu demonstrarea următoarelor două egalităţi:

$$C_n^1 + C_n^4 + C_n^7 + \ldots = \frac{1}{3}\left[2^n + 2\cos\frac{(n-2)\pi}{3}\right], \quad (9')$$

$$C_n^2 + C_n^5 + C_n^8 + \ldots = \frac{1}{3}\left[2^n + 2\cos\frac{(n-4)\pi}{3}\right]. \quad (9'')$$

4. *Aplicaţie. (Mica teoremă a lui Fermat).* Dacă p este un număr natural prim, iar n un număr natural oarecare, atunci $n^p - n$ se divide cu p.

Demonstraţie. Într-adevăr, pentru $n = 0$, afirmaţia este adevărată. Să presupunem $k^p - k$ divizibil cu p şi să demonstrăm că numărul $(k+1)^p - (k+1)$ este divizibil cu p. Pentru acesta, considerăm diferenţa

$$(k+1)^p - (k+1) - (k^p - k).$$

Dezvoltînd după formula lui Newton $(k+1)^p$, avem:

$$(k+1)^p - (k+1) - (k^p - k) = (k+1)^p - k^p - 1 =$$
$$= C_p^1 k^{p-1} + C_p^2 k^{p-2} + \ldots + C_p^{p-1} k. \quad (1)$$

Însă pentru $1 \leqslant j < p$ avem:

$$C_p^j = \frac{p(p-1)\ldots(p-j+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot j}.$$

Întrucît numărul p este prim, el nu se divide cu nici unul din numerele 1, 2,..., j de la numitor. De aceea C_p^j se divide cu p pentru $1 \leqslant j < p$. Dar atunci toţi termenii din membrul drept al egalităţii (1) se divid cu p şi deci membrul stîng se divide cu p. Dar cum am presupus că $k^p - k$ se divide cu p, atunci şi $(k+1)^p - (k+1)$ se divide cu p.

Conform metodei inducţiei matematice rezultă că $n^p - n$ se divide cu p, pentru orice număr natural n.

Observaţie. Dacă p este un număr natural prim, iar n un număr natural care nu este multiplu de p, atunci $n^{p-1} - 1$ se divide cu p. Acest enunţ este o variantă sub care se întîlneşte adesea teorema de mai înainte.

Exemple

1) Deoarece 17 este număr prim, atunci $1979^{17} - 1979$ se divide cu 17.

2) Deoarece 97 este număr prim, iar 721 nu este multiplu de 97, atunci $721^{96} - 1$ se divide cu 97.

3.3. Suma puterilor asemenea ale primelor *n* numere naturale

Fie $k \geqslant 1$ un număr natural şi să notăm cu

$$s_k = 1^k + 2^k + 3^k + \ldots + n^k.$$

În cele ce urmează ne propunem să evaluăm această sumă. Mai întîi vom calcula cîteva sume particulare, cum sînt S_1, S_2, S_3, care ne oferă o idee de calcul pentru cazul general.

1. Se verifică uşor prin inducţie matematică următoarea formulă care dă suma primelor n numere naturale

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (1)$$

2. Să calculăm acum

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2,$$

adică suma pătratelor primelor n numere naturale.

Să considerăm formula

$$(a+1)^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$$

Făcînd, succesiv, pe a egal cu 1, 2, 3, ..., $n-1$, n, obţinem

$$2^3 = 1^3 + 3\cdot 1^2 + 3\cdot 1 + 1,$$
$$3^3 = 2^3 + 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2 + 1,$$
$$4^3 = 3^3 + 3\cdot 3^2 + 3\cdot 3 + 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n^3 = (n-1)^3 + 3(n-1)^2 + 3(n-1) + 1,$$
$$(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1.$$

Adunînd aceste relaţii membru cu membru, după reducerea termenilor asemenea, se obţine

$$(n+1)^3 = 1 + 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n\cdot 1,$$

sau

$$(n+1)^3 = 1 + 3S_2 + 3S_1 + n,$$

de unde

$$3S_2 = (n+1)^3 - 3S_1 - (n+1).$$

Această formulă ne dă pe S_2 în funcţie de S_1. Dar dacă înlocuim S_1 dat de formula (1), după efectuarea calculelor, se obţine

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}. \quad (2)$$

3. Pentru a afla pe S_3,

$$S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$$

(suma cuburilor primelor n numere naturale) considerăm formula

$$(a+1)^4 = a^4 + 4a^3 + 6a^2 + 4a + 1.$$

Făcînd, succesiv, pe a egal cu 1, 2, 3, ..., $n-1$, n obţinem

$$2^4 = 1^4 + 4\cdot 1^3 + 6\cdot 1^2 + 4\cdot 1 + 1,$$
$$3^4 = 2^4 + 4\cdot 2^3 + 6\cdot 2^2 + 4\cdot 2 + 1,$$
$$4^4 = 3^4 + 4\cdot 3^3 + 6\cdot 3^2 + 4\cdot 3 + 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$n^4 = (n-1)^4 + 4(n-1)^3 + 6(n-1)^2 + 4(n-1) + 1,$$
$$(n+1)^4 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1.$$

Adunînd aceste relaţii membru cu membru, după reducerea termenilor asemenea, se obţine

$$(n+1)^4 = 1 + 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + n,$$

de unde

$$4S_3 = (n+1)^4 - 6S_2 - 4S_1 - (n+1).$$

Această formulă ne dă pe S_3 în funcţie de S_1 şi S_2. Înlocuind S_1 şi S_2 date de formulele (1) şi (2), se obţine după efectuarea calculelor

$$S_3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2. \quad (3)$$

Observăm că $S_3 = S_1^2$.

4. Calea prin care am găsit pe S_2 şi S_3 a fost aceeaşi. Ea poate fi urmată pentru găsirea lui S_k în general.

Folosim formula

$$(a+1)^{k+1} = a^{k+1} + C_{k+1}^1 a^k + C_{k+1}^2 a^{k-1} + \ldots + C_{k+1}^k a + C_{k+1}^{k+1}.$$

Făcînd, succesiv, pe a egal cu $1, 2, 3, \ldots, n-1, n$ obținem

$$2^{k+1} = 1^{k+1} + C_{k+1}^1 1^k + C_{k+1}^2 1^{k-1} + \ldots + C_{k+1}^k 1 + C_{k+1}^{k+1},$$

$$3^{k+1} = 2^{k+1} + C_{k+1}^1 2^k + C_{k+1}^2 2^{k-1} + \ldots + C_{k+1}^k 2 + C_{k+1}^{k+1},$$

$$4^{k+1} = 3^{k+1} + C_{k+1}^1 3^k + C_{k+1}^2 3^{k-1} + \ldots + C_{k+1}^k 3 + C_{k+1}^{k+1},$$

. . . .

$$n^{k+1} = (n-1)^{k+1} + C_{k+1}^1 (n-1)^k + C_{k+1}^2 (n-1)^{k-1} + \ldots + C_{k+1}^k (n-1) + C_{k+1}^{k+1},$$

$$(n+1)^{k+1} = n^{k+1} + C_{k+1}^1 n^k + C_{k+1}^2 n^{k-1} + \ldots + C_{k+1}^k n + C_{k+1}^{k+1}.$$

Adunînd aceste relații membru cu membru, după reducerea termenilor asemenea, se obține

$$(n+1)^{k+1} = 1 + C_{k+1}^1 S_k + C_{k+1}^2 S_{k-1} + \ldots + C_{k+1}^k S_1 + n. \qquad (4)$$

Aceasta este o formulă de recurență, care dă pe S_k în funcție de toate sumele precedente $S_1, S_2, \ldots, S_{k-1}$.

Să determinăm, de exemplu, pe S_4. Pentru $k = 4$, găsim:

$$(n+1)^5 = 1 + C_5^1 S_4 + C_5^2 S_3 + C_5^3 S_2 + C_5^4 S_1 + n.$$

Dacă înlocuim pe S_1, S_2, S_3, date de formulele (1), (2), (3), obținem după efectuarea calculelor:

$$S_4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}. \qquad (5)$$

Exerciții

1. Să se dezvolte după formula lui Newton binoamele la putere:

a) $(x^2 - a)^6$; c) $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^4$; e) $(\sqrt{3x} + \sqrt{y})^7$;

b) $(a - b)^5$; d) $(x + 2)^7$; f) $(3\sqrt[3]{x} - 2\sqrt{x})^5$.

2. Să se determine:

a) termenul al optulea al dezvoltării $\left(x^2 - \frac{1}{x}\right)^{11}$;

b) termenul al cincilea al dezvoltării $(\sqrt{2a} - \sqrt{ab})^7$;

c) termenul din mijloc al dezvoltării $(\sqrt{x} - \sqrt{y})^6$;

d) cei doi termeni din mijloc ai dezvoltării $(\sqrt{a} - \sqrt[3]{b})^9$.

3. Să se determine:

a) termenul din dezvoltarea $(\sqrt{x} + y)^9$ care îl conține pe x^3;

b) termenul din dezvoltarea $\left(\frac{\sqrt{a}}{3} + \frac{3}{\sqrt[3]{a}}\right)^{13}$ care îl conține pe a^4;

c) termenul în care nu apare x din dezvoltarea $\left(\sqrt[5]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{21}$.

4. Să se determine rangul termenului din dezvoltarea $\left(\sqrt[3]{\frac{x}{\sqrt{y}}} + \sqrt{\frac{y}{\sqrt[3]{x}}}\right)^{21}$, în care x și y au puteri egale.

5. Să se determine n, dacă în dezvoltarea $(1+x)^n$ coeficienții lui x^5 și x^{12} sînt egali.

6. Cîți termeni raționali conține dezvoltarea $(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3})^{100}$?

7. În dezvoltarea $\left(a\sqrt[4]{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^n$, suma coeficienților binomiali de rang par este egală cu 128. Să se găsească termenul care conține pe a^3.

8. Să se determine m, n, p astfel încît în dezvoltarea $\left(x^m + \frac{1}{x^p}\right)^n$, termenii de rang 12 și 24 să conțină pe x, respectiv x^5 și, mai mult, această dezvoltare să aibă termen liber.

9. Să se găsească suma coeficienților dezvoltării $(7x^2 - 6y^3)^9$.

10. Să se găsească rangul celui mai mare termen din dezvoltarea:

a) $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^{100}$; b) $\left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right)^{100}$.

11. Să se demonstreze egalitățile:

a) $C_n^0 + \frac{1}{2} C_n^1 + \ldots + \frac{1}{n+1} C_n^n = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}$;

b) $k + \frac{k^2 C_n^1}{2} + \frac{k^3 C_n^2}{3} + \ldots + \frac{k^{n+1} C_n^n}{n+1} = \frac{(k+1)^{n+1} - 1}{n+1}$;

c) $C_n^1 + 2C_n^2 + \ldots + nC_n^n = n2^{n-1}$;

d) $C_n^1 - 2C_n^2 + \ldots + (-1)^{n-1} nC_n^n = 0$;

e) $1 + C_n^1 \cos\alpha + C_n^2 \cos 2\alpha + \ldots + C_n^n \cos n\alpha = 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \cos \frac{n\alpha}{2}$,

$C_n^1 \sin\alpha + C_n^2 \sin 2\alpha + \ldots + C_n^n \sin n\alpha = 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \sin \frac{n\alpha}{2}$.

§ 4. Progresii aritmetice și progresii geometrice

4.1. Șiruri

1. *Noțiunea de șir.* Amintim că am notat prin N mulțimea numerelor naturale:

$$0, 1, 2, 3, \ldots, n, \ldots, \qquad (1)$$

iar prin N* mulțimea numerelor naturale nenule:

$$1, 2, 3, \ldots, n, \ldots . \qquad (2)$$

În mod obișnuit se spune că (1) și (2) reprezintă *șirul numerelor naturale*, respectiv *șirul numerelor naturale nenule*.

Să scriem în ordine descrescătoare fracțiile al căror numărător este egal cu 1:

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots .$$

Am scris numai primele cinci fracții. Este evident că pe locul al șaselea se găsește fracția $\frac{1}{6}$, pe al zecelea se găsește fracția $\frac{1}{10}$, pe al cincizecilea stă $\frac{1}{50}$, pe al o sutănouălea stă $\frac{1}{109}$. În general, pentru orice număr de ordine n, se poate indica fracția cu numărătorul egal cu 1, corespunzătoare acestuia.

Astfel, între mulțimea numerelor naturale nenule și mulțimea fracțiilor cu numărătorul egal cu 1, se stabilește o corespondență. Să notăm această corespondență cu litera f. Obținem astfel o funcție f definită pe mulțimea N^* a numerelor naturale nenule cu valori în mulțimea fracțiilor care au numărătorul egal cu 1. Mai mult, avem:

$$f(1) = \frac{1}{1}; \quad f(2) = \frac{1}{2}, \quad f(3) = \frac{1}{3}, \ldots, f(109) = \frac{1}{109}, \ldots .$$

Definiția 4. 1. 1. O funcție definită pe mulțimea N^* a numerelor naturale nenule cu valori într-o mulțime E se numește șir de elemente ale mulțimii E.

Fie $f: N^* \to E$ un șir de elemente ale mulțimii E. *Valorile funcției f, care corespund valorilor argumentului, egale cu 1, 2, 3 ș.a.m.d. se numesc, de obicei, termenii șirului de rang, respectiv, egal cu 1, 2, 3 ș.a.m.d.* Scriem termenii șirului în ordinea crescătoare a rangurilor:

$$f(1), f(2), f(3), \ldots, f(n), \ldots .$$

Notăm primul termen al șirului cu a_1, al doilea cu a_2, al treilea cu a_3, ..., al n-lea cu a_n ș.a.m.d. și atunci șirul se scrie:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots .$$

În această notație $f(n) = a_n$. Șirul se va nota cu (a_n). Putem nota șirul folosind orice altă literă în locul literei a. De exemplu (b_n), (c_n) ș.a..m.d.

Remarcăm că într-un șir același număr poate apărea cu ranguri diferite, De *exemplu*

$$1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots$$

este un șir.

Între mulțimea N^* a numerelor naturale nenule și mulțimea N a numerelor naturale există o *funcție bijectivă*, dată prin

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ 0 & 1 & 2 & \ldots & n-1 & \ldots \end{matrix}$$

De aceea numerotarea termenilor unui șir se mai poate face începînd cu zero:

$$a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots .$$

Remarcăm că pentru fiecare număr real

$$a = a_0, a_1a_2 \ldots a_n \ldots$$

se pun în evidență următoarele șiruri:

1) șirul: $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$;

2) șirul aproximărilor zecimale prin lipsă:

$$a_0;\ a_0, a_1;\ a_0, a_1a_2 \ldots;\ a_0, a_1a_2 \ldots a_n, \ldots;$$

3) șirul aproximărilor zecimale prin adaos:

$$a_0 + 1;\ a_0, a_1 + \frac{1}{10};\ a_0, a_1a_2 + \frac{1}{10^2}; \ldots;\ a_0, a_1a_2 \ldots a_n + \frac{1}{10^n}; \ldots .$$

În continuare vom considera numai șiruri de numere reale; acestea vor fi numite, mai simplu, *șiruri*.

2. *Moduri de definire a unui șir*

Șirul este un caz particular de funcție, de aceea modurile de definire a unei funcții se aplică și pentru definirea unui șir.

1° *Șiruri definite descriptiv (prin descriere)*

De *exemplu*, șirul (d_n) definit prin:

$$d_1 = 1,\ d_2 = 11,\ d_3 = 111, \ldots, d_n = \underbrace{11 \ldots 1}_{n \text{ ori}}, \ldots .$$

Acest șir se poate descrie astfel: fiecare termen al său se scrie cu ajutorul cifrei 1 și numărul cifrelor este egal cu rangul termenului șirului.

2° *Șiruri definite cu ajutorul unei formule care permite să se găsească orice termen al său*

Fie, de exemplu, șirul (b_n) astfel că pentru fiecare n, b_n este dat de formula:

$$b_n = n^2 - n + 1.$$

Punînd în formulă în loc de n, succesiv, valorile: 1, 2, 3, 4, ..., obținem: $b_1 = 1$, $b_2 = 3$, $b_3 = 7$, $b_4 = 13$ ș.a.m.d.

Formula care exprimă fiecare termen al șirului cu ajutorul rangului său n se numește formula termenului al n-lea (sau termenul general) al șirului.

3° *Modul recurent de definire a unui șir*

Să considerăm șirul (b_n) astfel că $b_1 = 1$, $b_2 = 2$, $b_{n+2} = b_n + b_{n+1}$, pentru $n \geqslant 1$.

Cunoscînd primii doi termeni b_1 și b_2 ai șirului și formula $b_{n+2} = b_n + b_{n+1}$, putem să găsim orice termen al acestui șir:

$$b_3 = 1 + 2 = 3,\ b_4 = 2 + 3 = 5,\ b_5 = 3 + 5 = 8 \text{ ș.a.m.d.}$$

O formulă care exprimă orice termen al șirului, de la un rang oarecare, prin precedenții (unul sau mai mulți) se numește *recurentă*.

Printr-un mod recurent de definire al unui șir indicăm de obicei:

1. primul termen al șirului (sau cîțiva din primii termeni);

2. formula care permite să se definească orice termen al șirului cu ajutorul termenilor precedenți cunoscuți.

Exemplu. Fie șirul (a_n) astfel încît $a_1 = 10$ și $a_{n+1} = a_n - 5$, $n \geqslant 1$. Atunci

$$a_2 = a_1 - 5 = 5,$$
$$a_3 = a_2 - 5 = 0,$$
$$a_4 = a_3 - 5 = -5 \text{ ș.a.m.d.}$$

4.2. Progresii aritmetice

1. *Definiția progresiei aritmetice*

Fie șirul (a_n), adică

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots,$$

astfel încît $a_1 = 3$ și $a_{n+1} = a_n + 2$, pentru $n \geqslant 1$. Deci $a_1 = 3$, $a_2 = 3 + 2 = 5$, $a_3 = 5 + 2 = 7$, $a_4 = 7 + 2 = 9$ etc.

Se observă că fiecare termen al acestui șir, începînd cu al doilea, se obține prin adăugarea la termenul precedent a unui aceluiași număr și anume 2.

Definiția 4.2.1. Un șir de numere în care fiecare termen, începînd cu al doilea, se obține din cel precedent prin adăugarea aceluiași număr, se numește *progresie aritmetică.*

Cu alte cuvinte, *un șir de numere*

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

este o progresie aritmetică, dacă pentru orice $k \geqslant 1$, *avem*

$$a_{k+1} = a_k + r,$$

unde r este un număr constant pentru șirul dat.

Din definiție rezultă că într-o progresie aritmetică diferența dintre orice termen și predecesorul său este egală cu același număr r.

Numărul r se numește *rația* progresiei aritmetice.

Progresia aritmetică (a_n) este complet determinată, dacă se cunosc primul termen a_1 și rația r.

Se spune că numerele $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ sînt *în progresie aritmetică, dacă ele sînt termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.*

Observație. Pentru a pune în evidență faptul că șirul $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ formează o progresie aritmetică se utilizează, adesea, scrierea

$$\div\, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots .$$

Exemple 1) Dacă $a_1 = 0$, $r = 1$, atunci avem progresia

$$0, 1, 2, 3, 4, \ldots,$$

adică șirul numerelor naturale.

2) Dacă $a_1 = -2$ și $r = -4$, atunci obținem progresia

$$-2, -6, -10, -14, \ldots .$$

3) Dacă $a_1 = 1$, $r = 2$, atunci obținem progresia

$$1, 3, 5, 7, \ldots,$$

adică șirul numerelor naturale impare.

O progresie aritmetică are următoarea proprietate importantă:

Teorema 4.2.2. Orice termen al unei progresii aritmetice

$$a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1} \ldots$$

începînd cu al doilea, este media aritmetică a termenilor vecini lui.

Cu alte cuvinte, *pentru orice* $n \geqslant 2$.

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}. \tag{1}$$

Demonstrație. Într-adevăr, pentru $n \geqslant 2$

$$a_n = a_{n-1} + r,$$

$$a_n = a_{n+1} - r.$$

Adunînd aceste două egalități, deducem

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1},$$

de unde rezultă egalitatea (1).

Este adevărată și afirmația reciprocă a acesteia, adică:

Dacă un șir de numere are proprietatea că fiecare termen al său, începînd cu al doilea, este media aritmetică a termenilor vecini lui, atunci acest șir este o progresie aritmetică.

Într-adevăr, să presupunem că pentru orice trei termeni consecutivi ai unui șir oarecare (a_n) are loc relația:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Atunci

$$2a_n = a_{n-1} + a_{n+1},$$

de unde

$$a_n + a_n = a_{n-1} + a_{n+1},$$

sau

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n.$$

Aceasta înseamnă că diferența dintre orice termen al șirului (a_n) și predecesorul său este egală cu același număr, și deci (a_n) este o progresie aritmetică.

Observație. Proprietatea semnalată mai înainte justifică denumirea de progresie aritmetică.

2. *Formula termenului general al unei progresii aritmetice*

Cunoscînd primul termen și rația unei progresii aritmetice (a_n) se poate da o formulă care permite să se găsească orice termen al progresiei.

Fie a_1 primul termen al progresiei aritmetice și r rația sa.

Atunci, din definiția progresiei aritmetice

$$a_2 = a_1 + r,$$

$$a_3 = a_2 + r = (a_1 + r) + r = a_1 + 2r,$$

$$a_4 = a_3 + r = (a_1 + 2r) + r = a_1 + 3r \text{ ș.a.m.d.}$$

În general, avem

Teorema 4.2.3. Termenul general al unei progresii aritmetice este dat de formula:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r. \tag{1}$$

Demonstrație. Vom demonstra formula prin metoda inducției matematice. Notăm cu $P(n)$ egalitatea (1), pentru un n dat.

1° Pentru $n = 1$, egalitatea (1) este evident adevărată.

2° Rămîne să arătăm că pentru orice număr natural k, avem $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$.

Fie deci adevărată $P(k)$, adică

$$a_k = a_1 + (k - 1)r.$$

Să arătăm că este adevărată $P(k + 1)$. Într-adevăr, avem

$$a_{k+1} = a_k + r = a_1 + (k - 1)r + r = a_1 + kr.$$

Deci ambele etape ale metodei inducției matematice sînt verificate. Înseamnă că $P(n)$ este adevărată pentru orice număr natural n. Formula (1) este astfel demonstrată.

De *exemplu*, pentru progresia aritmetică

$$-10, -5, 0, 5, 10, \ldots,$$

avem

$$a_1 = -10; \; r = 5.$$

De aceea

$$a_{13} = a_1 + 12r = -10 + 60 = 50,$$

$$a_{55} = a_1 + 54r = -10 + 270 = 260$$

ş.a.m.d.

3. *Formula sumei primilor n termeni ai unei progresii aritmetice*

Ne propunem să găsim suma numerelor naturale de la 1 la 100, adică

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 100.$$

Evident se poate efectua această sumă adunînd termen cu termen numerele de la 1 la 100. Această soluţie este destul de anevoioasă. Să procedăm de aceea în modul următor:

Scriem suma numerelor naturale de la 1 la 100, de două ori. În primul rînd scriem termenii sumei în ordine crescătoare, iar în al doilea rînd în ordine descrescătoare. Astfel:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100,$$

$$100 + 99 + 98 + \ldots + 3 + 2 + 1.$$

Se observă că suma numerelor aşezate unul sub altul este aceeaşi:

$$1 + 100 = 2 + 99 = 3 + 98 = \ldots = 98 + 3 = 99 + 2 = 100 + 1.$$

Cum fiecare astfel de pereche de numere are suma egală cu 101 şi cum numărul perechilor este 100, se obţine

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100 = \frac{101 \cdot 100}{2} = 101 \cdot 50 = 5050.$$

Se poate proceda analog, pentru deducerea formulei care dă suma primilor n termeni ai oricărei progresii aritmetice.*

Fie (a_n) o progresie aritmetică de raţie r şi fie S_n suma primilor n termeni ai săi, adică

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n.$$

Numerele $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$ sînt în progresie aritmetică.

Dăm mai întîi următoarea proprietate importantă a lor.

T e o r e m a 4. 2. 4. Fie numerele $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n$ în progresie aritmetică. Atunci

$$a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n.$$

Cu alte cuvinte, *suma oricăror două numere egal depărtate de numerele extreme este egală cu suma numerelor extreme.*

* Se spune că Karl Friedrich Gauss (1777—1855), matematician german, unul dintre cei mai mari matematicieni ai tuturor timpurilor, pe vremea cînd era elev la şcoala primară l-a uimit pe profesorul său, deoarece a calculat mintal suma unui număr par de numere, pe care profesorul o considera o problemă anevoioasă. De fapt, elevul observase că numerele din sumă au proprietatea că suma termenilor egal depărtaţi de extremi este aceeaşi şi a înmulţit aceasta cu jumătate din numărul termenilor.

Demonstraţie. Dacă r este raţia, atunci

$$a_k = a_1 + (k - 1)r \text{ şi } a_{n-k+1} = a_1 + (n - k)r,$$

de unde: $a_k + a_{n-k+1} = [a_1 + (k - 1)r] + [a_1 + (n - k)r] = 2a_1 + (n - 1)r.$

Dar $a_1 + a_n = a_1 + [a_1 + (n - 1)r] = 2a_1 + (n - 1)r.$

Deci $a_k + a_{n-k+1} = a_1 + a_n = 2a_1 + (n - 1)r.$

Folosind această teoremă este uşor de calculat formula generală pentru suma S_n. Avem

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n,$$

$$S_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_3 + a_2 + a_1.$$

Adunînd aceste două egalităţi se obţine:

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + (a_3 + a_{n-2}) + \ldots + (a_{n-2} + a_3) + $$
$$+ (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Dar, conform teoremei precedente, avem

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = \ldots .$$

De aceea

$$2S_n = n(a_1 + a_n),$$

de unde

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}. \quad (1)$$

Deci: *suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice este egală cu produsul dintre semisuma termenilor extremi (ai sumei) şi numărul termenilor sumei.*

În particular,

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 100 = \frac{(1 + 100)100}{2} = 5\,050.$$

Observaţie. Înlocuim în formula $S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$ termenul a_n al progresiei prin $a_1 + (n - 1)r$. Atunci

$$S_n = \frac{a_1 + a_1 + (n - 1)r}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n - 1)r}{2} \cdot n.$$

Aşadar

$$S_n = \frac{2a_1 + (n - 1)r}{2} \cdot n. \quad (2)$$

Am obţinut astfel o formulă în care suma primilor n termeni ai unei progresii aritmetice se exprimă în funcţie de primul termen, raţie şi numărul termenilor.

Exemplu. Să determinăm suma primilor 10 termeni ai progresiei aritmetice (a_n):

$$1, 4, 7, 10, \ldots,$$

Primul termen al progresiei este 1, iar raţia este 3. Atunci al 10-lea termen al progresiei este:

$$a_{10} = 1 + (10 - 1) \cdot 3 = 1 + 9 \cdot 3 = 28.$$

Deci

$$S_{10} = \frac{(1+28)10}{2} = 29 \cdot 5 = 145.$$

Putem aplica şi formula (2) pentru calculul sumei S_{10}.

4.3. Progresii geometrice

1. *Definiţia progresiei geometrice*

Fie şirul (b_n), adică

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots,$$

astfel încît $b_1 = 2$ şi $b_{n+1} = 3 \cdot b_n$ pentru $n \geqslant 1$. Atunci $b_1 = 2$; $b_2 = 3 \cdot b_1 = 6$; $b_3 = 3 \cdot b_2 = 18$; $b_4 = 3 \cdot b_3 = 54$ ş.a.m.d.

Fiecare termen al acestui şir, începînd cu al doilea, se obţine prin înmulţirea termenului precedent cu un acelaşi număr şi anume cu 3.

Definiţia 4.3.1. Un şir de numere al cărui prim termen este nenul, iar fiecare termen al său, începînd cu al doilea, se obţine din cel precedent prin înmulţirea cu un acelaşi număr nenul, se numeşte progresie geometrică.

Cu alte cuvinte, *un şir de numere*

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots \ (b_1 \neq 0),$$

este o progresie geometrică dacă pentru orice $k \geqslant 1$, *avem*

$$b_{k+1} = b_k \cdot q,$$

unde $q \neq 0$ *este un număr constant, pentru şirul dat.*

Din definiţie rezultă că într-o progresie geometrică cîtul dintre orice termen şi predecesorul său este egal cu acelaşi număr q.

Numărul q se numeşte *raţia* progresiei geometrice.

Progresia geometrică (b_n) este complet determinată, dacă se cunosc primul termen b_1 şi raţia q.

Se spune că numerele $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ *sînt în progresie geometrică dacă ele sînt termenii consecutivi ai unei progresii geometrice.*

Observaţie. Pentru a pune în evidenţă faptul că şirul $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots$ formează o progresie geometrică se utilizează, adesea, scrierea

$$\div\div\ b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n, \ldots.$$

Exemple

1) Dacă $b_1 = 5$, $q = \frac{1}{3}$, atunci avem progresia

$$5, \frac{5}{3}, \frac{5}{9}, \frac{5}{27}, \ldots.$$

2) Dacă $b_1 = 3$, $q = -2$, atunci avem progresia

$$3, -6, 12, -24, \ldots.$$

Dacă raţia q a unei progresii geometrice este pozitivă, adică $q > 0$, atunci toţi termenii progresiei au acelaşi semn şi anume:

1° Dacă $b_1 > 0$, atunci toţi termenii sînt pozitivi.
2° Dacă $b_1 < 0$, atunci toţi termenii sînt negativi.

În cazul în care $q < 0$, termenii de rang impar ai progresiei au acelaşi semn ca şi primul termen, iar termenii de rang par ai progresiei au semn contrar semnului primului termen al progresiei. Deci, în acest caz, semnele termenilor progresiei alternează.

O progresie geometrică cu termeni pozitivi are următoarea proprietate importantă care, în particular, justifică denumirea de „progresie geometrică"

Teorema 4.3.2. Orice termen al unei progresii geometrice cu termeni pozitivi

$$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{n-1}, b_n, b_{n+1}, \ldots,$$

începînd cu al doilea, este media geometrică a termenilor vecini lui.

Cu alte cuvinte, *pentru orice* $n \geqslant 2$,

$$b_n = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}. \qquad (1)$$

Demonstraţie. Într-adevăr, pentru $n \geqslant 2$

$$b_n = b_{n-1}q,$$

$$b_n = \frac{b_{n+1}}{q}.$$

Înmulţind aceste două egalităţi, deducem

$$b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1},$$

de unde rezultă egalitatea (1).

Este adevărată şi afirmaţia reciprocă a acesteia:

Dacă un şir de numere cu termeni pozitivi are proprietatea că fiecare termen al său, începînd cu al doilea, este media geometrică a termenilor vecini lui, atunci acest şir este o progresie geometrică.

Într-adevăr, să presupunem că pentru orice trei termeni consecutivi ai unui şir oarecare (b_n) cu termeni pozitivi, are loc relaţia:

$$b_n = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}.$$

Atunci

$$b_n^2 = b_{n-1}b_{n+1},$$

de unde

$$b_nb_n = b_{n-1}b_{n+1},$$

sau

$$b_n : b_{n-1} = b_{n+1} : b_n.$$

Aşadar, cîtul dintre orice termen al şirului (b_n) şi predecesorul său este egal cu acelaşi număr. Deci (b_n) este o progresie geometrică.

2. *Formula termenului general al unei progresii geometrice*

Cunoscînd primul termen şi raţia unei progresii geometrice (b_n) se poate da o formulă care permite să se găsească orice termen al progresiei.

Fie b_1 primul termen al progresiei geometrice și q rația sa. Atunci, din definiția progresiei geometrice, deducem:

$$b_2 = b_1 \cdot q,$$

$$b_3 = b_2 \cdot q = (b_1 \cdot q) \cdot q = b_1 \cdot q^2,$$

$$b_4 = b_3 \cdot q = (b_1 \cdot q^2) \cdot q = b_1 \cdot q^3 \text{ ș.a.m.d.}$$

În general, avem

Teorema 4.3.3. **Termenul general al unei progresii geometrice este dat de formula:**

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}. \tag{1}$$

Demonstrație. Vom demonstra formula prin metoda inducției matematice. Notăm cu $P(n)$ egalitatea (1), pentru un n dat.

1. Pentru $n = 1$, egalitatea este evident adevărată.
2. Fie acum $P(k)$ adevărată, adică

$$b_k = b_1 \cdot q^{k-1}.$$

Atunci $b_{k+1} = b_k q = (b_1 q^{k-1}) q = b_1 q^k$, deci $P(k+1)$ este adevărată.

Așadar $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Metoda inducției matematice ne asigură că formula (1) este adevărată pentru orice număr natural n.

Exemplu. Pentru progresia geometrică

$$12,\ -6,\ 3,\ -\frac{3}{2},\ \ldots,$$

avem $b_1 = 12$, $q = -\frac{1}{2}$. De aceea

$$b_{10} = b_1 q^9 = 12\left(-\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{3}{(-2)^7} = -\frac{3}{128};$$

$$b_{101} = b_1 q^{100} = 12\left(-\frac{1}{2}\right)^{100} = \frac{3}{2^{98}}$$

ș.a.m.d.

3. *Formula sumei primilor n termeni ai unei progresii geometrice.*

Fie (b_n) o progresie geometrică, de rație q și fie

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_{n-1} + b_n, \tag{1}$$

suma primilor n termeni ai săi.

Numerele $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{n-1}, b_n$ sînt în progresie geometrică. Ca și pentru numere în progresie aritmetică, pentru numerele $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{n-1}, b_n$, care sînt în progresie geometrică, are loc o relație analoagă,

$$b_k b_{n-k+1} = b_1 b_n$$

adică *produsul oricăror două numere egal depărtate de numerele extreme este egal cu produsul numerelor extreme.*

Pentru calculul sumei S_n distingem două cazuri:

1. Dacă rația q a progresiei este egală cu 1, atunci $S_n = nb_1$.
2. Dacă rația q a progresiei este diferită de 1, atunci procedăm în modul următor:

Înmulțim ambii membri ai egalității (1) cu q:

$$qS_n = b_1 q + b_2 q + b_3 q + \ldots + b_{n-1} q + b_n q.$$

Însă $b_1 q = b_2$, $b_2 q = b_3$, $b_3 q = b_4$, ..., $b_{n-1} q = b_n$, de aceea,

$$qS_n = b_2 + b_3 + b_4 + \ldots + b_n + b_n q. \tag{2}$$

Scăzînd, membru cu membru, egalitatea (1) din egalitatea (2) obținem:

$$qS_n - S_n = b_n q - b_1,$$

$$S_n(q - 1) = b_n q - b_1.$$

Deoarece $q \neq 1$,

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}. \tag{3}$$

Observație. Dacă în formula $S_n = \frac{b_n q - b_1}{q - 1}$, unde $q \neq 1$, înlocuim pe b_n cu $b_1 q^{n-1}$, atunci obținem o altă formulă a sumei primilor n termeni ai progresiei geometrice:

$$S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q - 1}\ (q \neq 1). \tag{4}$$

Exemplu. Să găsim suma primilor 10 termeni ai progresiei geometrice (b_n)

$$1,\ 2,\ 4,\ 8,\ \ldots.$$

Avem $b_1 = 1$ și $q = 2$. Atunci, după formula (4), obținem

$$S_{10} = \frac{1(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 2^{10} - 1 = 1\,024 - 1 = 1\,023.$$

Putem aplica și formula (3) pentru calculul sumei S_{10}, calculîndu-l mai întîi pe b_{10}.

Exerciții

Șiruri

1. Să se scrie primii cinci termeni ai șirului, cu termenul al n-lea dat de formula:

a) $a_n = 2^{-n}$; d) $c_n = \frac{3n - 2}{2 + n}$; g) $d_n = (-1)^n$;

b) $x_n = 5 + 4n$; e) $x_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}$; h) $a_n = \operatorname{tg} \frac{\pi}{n + 2}$; $(n \geqslant 1)$;

c) $b_n = 10 - n^2$; f) $z_n = \sin\left(\frac{\pi}{9} \cdot n\right)$; i) $b_n = (-1)^n \cdot 7 + \frac{1}{n}$.

2. Să se găsească formula termenului al n-lea $(n \geqslant 1)$ pentru fiecare din șirurile:

a) 1, 3, 5, 7, 9, ... ; e) $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$;

b) 2, 4, 6, 8, 10, ... ; f) tg 45°, tg 22°30′, tg 11°55′, ... ;

c) 3, −3, 3, −3, 3, ...; g) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$;

d) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \frac{1}{81}, \ldots$; h) 1, 9, 25, 49, 81, ...

3. Şirul (x_n), $n \geqslant 1$, are termenul general dat de formula $x_n = 6 - 4n$. Este termen al acestui şir numărul:

a) -102; b) -132; c) 100; d) 150?

În cazul în care răspunsul este afirmativ să se indice numărul de ordine al acestui termen.

4. Este termen al şirului (a_n), $n \geqslant 1$, unde $a_n = n^2 - 17n$, numărul:

a) -30; b) -72; c) -100; d) -200?

În caz afirmativ să se indice numărul de ordine al acestui termen.

5. Să se scrie primii 6 termeni ai şirului (a_n), $n \geqslant 1$, dacă:

a) $a_1 = 1$; $a_{n+1} = a_n - 1$;

b) $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + 2$;

c) $a_1 = -2$, $a_{n+1} = 2a_n$;

d) $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \frac{1}{a_n}$;

e) $a_1 = -1$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$;

f) $a_1 = 3$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n - a_{n+1}$.

6. Un şir este definit prin formula de recurenţă

$$(n + 2)(n + 1)\, a_{n+2} - n^2 a_n = 0$$

şi prin $a_1 = 0$, $a_2 = 1$. Să se deducă termenul general.

Progresii aritmetice

7. Să se scrie primii patru termeni ai progresiei aritmetice (a_n), dacă:

a) $a_1 = 7$, $r = 2$;

b) $a_1 = -3$, $r = 5$;

c) $a_1 = 1{,}3$, $a_2 = 0{,}3$;

d) $a_1 = \frac{2}{7}$, $a_2 = \frac{1}{5}$

8. Să se găsească primii doi termeni ai progresiei aritmetice (b_n) dată astfel:

a) $b_1, b_2, 15, 21, 27, \ldots$;

b) $b_1, b_2, -9, -2, 5, \ldots$.

9. Dacă se cunosc doi termeni ai unei progresii aritmetice (c_n):

a) $c_3 = 7$ şi $c_5 = 13$, să se găsească c_9, c_2, c_{15};

b) $c_8 = 40$ şi $c_{20} = -20$, să se găsească c_{16}, c_7, c_{19}.

10. Într-o progresie aritmetică (a_n) se cunoaşte a_1 şi r. Să se găsească a_n, dacă:

a) $a_1 = -2$, $r = 0{,}5$, $n = 12$;

b) $a_1 = 3$, $r = -1{,}5$, $n = 19$;

c) $a_1 = -2{,}5$, $r = -2$, $n = 50$;

d) $a_1 = \frac{3}{7}$, $r = \frac{1}{3}$, $n = 25$.

11. Să se găsească primul termen a_1 al unei progresii aritmetice, dacă:

a) $a_{10} = 131$, $r = 12$;

b) $a_{52} = -125$, $r = -5$;

c) $a_{200} = 0$, $r = -3$;

d) $a_{44} = 13{,}5$, $r = 0{,}5$.

12. Să se găsească primul termen şi raţia unei progresii aritmetice, dacă:

a) $c_5 = 27$, $c_{27} = 60$;

b) $c_{47} = 74$, $c_{74} = 47$;

c) $c_{20} = 0$, $c_{66} = -92$;

d) $a_1 + a_7 = 42$, $a_{10} - a_3 = 21$;

e) $a_2 + a_4 = 16$, $a_1 a_5 = 28$;

f) $S_{10} = 8S_5$, $S_3 = -3$.

13. Şirul (y_n) este dat prin formula termenului al n-lea:

a) $y_n = 2n - 5$; b) $y_n = 10 - 7n$.

Să se demonstreze că şirul (y_n) este o progresie aritmetică. Să se găsească primul termen al său şi raţia.

14. Să se găsească suma primilor 100 termeni ai unei progresii aritmetice (a_n), dacă:

a) $a_1 = 10$, $a_{100} = 150$;

b) $a_1 = 5{,}5$, $a_{100} = 7{,}5$;

c) $a_1 = 2$, $r = -5$;

d) $a_1 = -1$, $r = 1$.

15. Cunoscînd suma S_n a primilor n termeni ai unei progresii aritmetice (a_n), să se găsească:

a) primii cinci termeni ai progresiei, dacă $S_n = \frac{n^2}{4} - n$;

b) primul termen şi raţia progresiei, dacă $S_n = 2n^2 + 3n$.

16. Să se rezolve ecuaţiile:

a) $1 + 7 + 13 + \ldots + x = 280$;

b) $(x + 1) + (x + 4) + (x + 7) + \ldots + (x + 28) = 155$.

17. Să se găsească suma primilor douăzeci de termeni ai unei progresii aritmetice, dacă:

$$a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20.$$

18. Este progresie aritmetică un şir, pentru care suma primilor n termeni ai săi este dată de formula:

a) $S_n = n^2 - 2n$;

b) $S_n = -4n^2 + 11$;

c) $S_n = 7n - 1$;

d) $S_n = n^2 - n + 3$?

19. Într-o progresie aritmetică avem $S_{10} = 100$, $S_{30} = 900$. Să se găsească S_{50}.

20. Suma primilor n termeni ai unui şir oarecare (b_n) este dată de formula $S_n = n^2 - 2n + 5$. Să se găsească primii patru termeni ai acestui şir. Este acest şir o progresie aritmetică?

21. Să se demonstreze că numerele următoare sînt în progresie aritmetică:

a) $\frac{a}{x + 1}$, $\frac{x + a - 1}{2x}$, $\frac{x^2 + a - 1}{x(x + 1)}$ $(x \neq -1,\ x \neq 0)$;

b) $(a^2 - 2ab - b^2)^2$, $(a^2 + b^2)^2$, $(a^2 + 2ab - b^2)^2$.

22. Să se demonstreze că dacă numerele a, b, c sînt în progresie aritmetică, atunci şi numerele următoare sînt în progresie aritmetică:

i) $a^2 - bc$, $b^2 - ca$, $c^2 - ab$;

ii) $b^2 + bc + c^2$, $c^2 + ca + a^2$, $a^2 + ab + b^2$.

Să se arate că dacă $a + b + c \neq 0$, atunci este adevărată şi reciproca.

23. Să se demonstreze că dacă a^2, b^2, c^2 sînt în progresie aritmetică, atunci şi numerele următoare sînt în progresie aritmetică:

i) $\frac{1}{b + c}$, $\frac{1}{c + a}$, $\frac{1}{a + b}$;

ii) $\frac{a}{b + c}$, $\frac{b}{c + a}$, $\frac{c}{a + b}$.

Să se studieze reciproca.

24. Să se determine x astfel încît următoarele numere să fie, separat, în progresie aritmetică:

i) $1 + x^2$, $(a + x)^2$, $(a^2 + x)^2$;

ii) $a^2 + x$, $ab + x$, $b^2 + x$;

iii) $a^2(b + x)$, $b^2(a + x)$, $x^2(a + b)$.

25. Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, un şir de numere reale. Să se arate că acest şir este o progresie aritmetică dacă şi numai dacă pentru orice n avem relaţia:

$$\frac{1}{x_1 x_2} + \frac{1}{x_2 x_3} + \ldots + \frac{1}{x_{n-1} x_n} = \frac{n - 1}{x_1 x_n}.$$

Progresii geometrice

26. Să se scrie primii cinci termeni ai progresiei geometrice (b_n) dacă:

a) $b_1 = 6$, $q = 2$;

b) $b_2 = -10$, $q = \frac{1}{2}$;

c) $b_1 = -24$, $q = -0{,}5$;

d) $b_2 = 0{,}5$, $q = \sqrt{3}$.

27. Să se găsească primii doi termeni ai progresiei geometrice (y_n), dată astfel:

a) $y_1, y_2, 24, 36, 54, \ldots$;

b) $y_1, y_2, 225, -135, 81, \ldots$.

28. Dacă se cunosc doi termeni ai unei progresii geometrice (b_n):

a) $b_3 = 6$, $b_5 = 24$, să se găsească b_8, b_9, b_{10};

b) $b_5 = 10$, $b_8 = -10$, să se găsească b_6, b_{12}, b_3.

29. Este progresie aritmetică sau progresie geometrică șirul (a_n), dacă:

a) $a_1 = 5$ și $a_{n+1} = 2a_n$;

b) $a_1 = 5$ și $a_{n+1} = 2 + a_n$;

c) $a_1 = -8$ și $a_{n+1} = \frac{1}{3} + a_n$;

d) $a_1 = -8$ și $a_{n+1} = \frac{1}{3} a_n$?

În caz afirmativ să se indice rația.

30. Să se scrie formula termenului al n-lea al progresiei geometrice date prin:

a) $b_1 = 2$, $b_{n+1} = 3b_n$;

b) $b_1 = 4$, $b_{n+1} = (-3)b_n$;

c) $b_1 = 9$, $b_{n+1} = 2b_n$;

d) $b_1 = 10$, $b_{n+1} = \frac{1}{5} b_n$.

31. Să se găsească primul termen și rația unei progresii geometrice, dacă:

a) $\begin{cases} a_2 - a_1 = -4, \\ a_3 - a_1 = 8; \end{cases}$

b) $\begin{cases} a_4 + a_1 = \frac{7}{16}, \\ a_3 - a_2 + a_1 = \frac{7}{8}; \end{cases}$

c) $a_6 = 25$, $a_8 = 9$;

d) $a_4 = -12$, $a_7 = 23\frac{7}{16}$.

32. Să se calculeze sumele:

a) $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{15}$;

b) $\frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \ldots - \frac{1}{2^{16}}$;

c) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{3^{12}}$;

d) $1 - 2 + 2^2 - 2^3 + \ldots + 2^{12}$;

e) $1 + x + x^2 + \ldots + x^{100}$;

f) $x - x^3 + x^5 - \ldots + x^{17}$.

33. Să se rezolve ecuațiile:

a) $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{99} = 0$;

b) $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{100} = 0$.

34. Fie (y_n) o progresie geometrică, astfel încît suma primilor n termeni ai săi este $S_n = 2(5^n - 1)$. Să se determine S_4, y_1, y_2.

35. Este progresie geometrică un șir, pentru care suma primilor n termeni ai săi este dată de formula:

a) $S_n = n^2 - 1$; b) $S_n = 2^n - 1$; c) $S_n = 3^n + 1$?

36. Într-o progresie geometrică avem $S_3 = 40$, $S_6 = 60$. Să se găsească S_9.

37. Să se determine x astfel încît numerele $a + x$, $b + x$, $c + x$ să fie în progresie geometrică.

38. Se dau două numere a și b. Să se determine numerele x, y, z astfel încît să fie satisfăcute simultan condițiile:

i) x, y, z să fie în progresie geometrică;

ii) x, $y + a$, z să fie în progresie aritmetică;

iii) x, $y + a$, $z + b$ să fie în progresie geometrică.

Caz particular: $a = 4$, $b = 32$.

39. Să se cerceteze dacă există numere în progresie geometrică $b_1, b_2, \ldots, b_n$, unde b_1 este un număr dat astfel încît trei termeni consecutivi verifică, oricare ar fi k, relația $b_k - 5b_{k-1} + 6b_{k-2} = 0$. Să se generalizeze considerînd relația $\alpha b_k + \beta b_{k-1} + \gamma b_{k-2} = 0$.

III Noțiuni de aritmetica numerelor întregi

§ 1. Teorema împărțirii cu rest a numerelor întregi

Ne reamintim din materia parcursă în clasele anterioare că oricare ar fi două numere naturale a și b, cu b diferit de zero, există alte două numere naturale q și r unice, cu proprietatea că $a = bq + r$ și $0 \leqslant r < b$. Teorema care asigură existența și unicitatea numerelor q și r se numește *teorema împărțirii cu rest în mulțimea numerelor naturale*.

Această teoremă se extinde la mulțimea numerelor întregi în felul următor:

Teorema 1.1. Fie a și b două numere întregi, cu b diferit de zero. Atunci există două numere întregi q și r unice cu proprietățile

$$a = bq + r \text{ și } 0 \leqslant r < |b|. \quad (1)$$

Egalitatea (1) se numește *formula împărțirii cu rest pentru numere întregi* iar numerele q și r se numesc *cîtul* și respectiv *restul* împărțirii lui a la b.

Nu vom da demonstrația acestei teoreme, în schimb vom arăta cum se procedează practic atunci cînd avem de împărțit două numere întregi a și b, cu $b \neq 0$.

Evident că dacă $a = 0$, atunci cîtul și restul împărțirii lui a prin b sînt $q = r = 0$. Deci putem presupune că $a \neq 0$. Definim

$$\text{sgn } (a) = \begin{cases} +1, \text{ dacă } a > 0 \\ -1, \text{ dacă } a < 0 \end{cases}$$

Numărul sgn (a) se numește *semnul lui a*.

Cu aceste notații avem clar că $|a| = a \text{ sgn } (a)$.

Vom efectua acum împărțirea numerelor naturale $|a|$ și $|b|$ cu algoritmul de calcul cunoscut din clasele anterioare:

$$|a| = |b|q' + r' \text{ cu } q', r' \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant r' < |b|. \quad (2)$$

Din (2) obținem

$$a \text{ sgn}(a) = b \text{ sgn}(b)q' + r'$$

care înmulțită cu sgn(a), și ținînd cont că sgn$(a) \cdot$ sgn$(a) = 1$, ne dă

$$a = bq'' + r'' \quad (3)$$

unde $q'' = \text{sgn}(a)\,\text{sgn}(b)q'$ și $r'' = r'\,\text{sgn}(a)$.

Dacă $r'' \geqslant 0$ atunci cîtul și restul împărțirii lui a prin b sînt q'', respectiv r''. Dacă $r'' < 0$, atunci (3) se scrie astfel:

$a = bq'' + r'' = bq'' - |b| + |b| - r'' = bq'' - b\,\text{sgn}(b) + (|b| - r'') = b(q'' - \text{sgn}(b)) + (|b| - r'') = bq + r$, unde am notat $q = q'' - \text{sgn}(b)$ și $r = |b| - r''$.

Cum $r'' < 0$ și $r' \geqslant 0$, atunci $\operatorname{sgn}(a) = -1$ și deci $r'' = -r'$. Pe de altă parte, cum $0 \leqslant r' < |b|$, rezultă clar că $0 \leqslant r < |b|$. Deci cîtul și restul împărțirii lui a prin b sînt $q = q'' - \operatorname{sgn}(b)$ respectiv $r = |b| - r''$.

Exemple.

1) Să se efectueze împărțirea cu rest a lui -50 la 6.

Soluție. Vom efectua împărțirea cu rest a lui $|-50| = 50$ la $|6| = 6$. Vom avea $50 = 6 \cdot 8 + 2$. Înmulțind cu (-1) avem $-50 = 6 \cdot (-8) + (-2) = 6 \cdot (-8) - 6 + 6 + (-2) = 6 \cdot (-9) + 4$.
Deci cîtul împărțirii lui -50 la 6 este $q = -9$ iar restul $r = 4$.

2) Să se efectueze împărțirea cu rest a lui -721 la -50.

Soluție. Avem $|-721| = 721$, $|-50| = 50$ și $721 = 50 \cdot 14 + 21$.
Rezultă că $-721 = (-50) \cdot 14 + (-21) = (-50) \cdot 14 - 50 + 50 + (-21) = (-50) \cdot 15 + 29$.
Deci cîtul împărțirii lui -721 la -50 este $q = 15$ iar restul $r = 29$.

Observație. Formula împărțirii cu rest pentru numere întregi se poate pune sub următoarea formă: dacă $a, b \in \mathbb{Z}$, cu $b \neq 0$, există $q_0, r_0 \in \mathbb{Z}$ astfel încît

$$a = bq_0 + r_0 \text{ și } |r_0| \leqslant \frac{|b|}{2}. \qquad (1')$$

Într-adevăr, din (1), există $q, r \in \mathbb{Z}$ astfel încît $a = bq + r$ și $0 \leqslant r < |b|$. Dacă $0 \leqslant r < \frac{|b|}{2}$, atunci punem $q_0 = q$ și $r_0 = r$. Dacă $\frac{|b|}{2} < r < |b|$ atunci avem $a = bq + r = bq + |b| + r - |b| = b(q + \operatorname{sgn} b) + (r - |b|)$. Dacă notăm $q_0 = q + \operatorname{sgn} b$ și $r_0 = r - |b|$, atunci $|r_0| \leqslant \frac{|b|}{2}$ și $a = bq_0 + r_0$. Să observăm că în relația (1′), q_0 și r_0 nu sînt unice. De *exemplu* $7 = 2 \cdot 3 + 1$ și $7 = 2 \cdot 4 + (-1)$.

Formula (1′) este foarte utilă în multe aplicații. De exemplu să arătăm că dacă $n \in \mathbb{Z}$, atunci restul împărțirii lui n^2 la 7 este 0, 1, 2 sau 4. Într-adevăr, folosind egalitatea (1′), n poate avea una din următoarele forme:

$$7k,\ 7k \pm 1,\ 7k \pm 2,\ 7k \pm 3,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Dacă $n = 7k$, atunci $n^2 = 49k^2 = 7(7k^2)$ și deci restul împărțirii lui n^2 la 7 este 0.

Dacă $n = 7k \pm 1$, atunci $n^2 = (7k \pm 1)^2 = 49k^2 \pm 14k + 1 = 7(7k^2 + 2k) + 1$ și deci în acest caz restul împărțirii lui n^2 la 7 este 1.

Dacă $n = 7k \pm 2$, atunci $n^2 = (7k \pm 2)^2 = 49k^2 \pm 28k + 4 = 7(7k^2 \pm 4k) + 4$ și deci restul împărțirii este 4.

Dacă $n = 7k \pm 3$, atunci $n^2 = (7k \pm 3)^2 = 49k^2 \pm 42k + 9 = 49k^2 \pm 42k + 7 + 2 = 7(7k^2 \pm 6k + 1) + 2$ și deci restul împărțirii lui n^2 la 7 este în acest caz egal cu 2.

Exerciții

1. Să se efectueze împărțirile cu rest ale următoarelor perechi de numere întregi:
   a) $-5\,437$ la 225
   b) $8\,745$ la -319
   c) $-2\,438$ la -18
   d) $-84\,312$ la -36,
2. Să se găsească două numere naturale a căror sumă să fie 6 612 și cîtul împărțirii celui mai mare prin cel mai mic să fie 75. Este soluția unică?

3. Care este ultima cifră a numerelor $2\,156^{43}$, 425^{21}, 251^{143}, $5\,234^{129}$, $164^{21} + 453^{18}$, $17^{80} + 12^{60}$?
4. Fie n, a, b și c numere naturale nenule. Să se arate că pentru a găsi cîtul împărțirii lui n la $a \cdot b \cdot c$ se poate proceda în felul următor: se împarte n la a, apoi cîtul obținut se împarte la b și noul cît se împarte la c; cîtul obținut la această ultimă împărțire este cel căutat.
5. Fie x și y două numere reale, cu $y \neq 0$. Să se arate că există două numere reale q și r cu proprietățile:
   $$x = yq + r;\ q \in \mathbb{Z} \text{ și } 0 \leqslant r < |y|.$$
   În plus, q și r sînt unice cu proprietățile de mai sus.
6. Fie a, b, c numere întregi, $c \neq 0$ și r_1 și r_2 resturile împărțirii lui a și b la c. Atunci restul împărțirii lui $a + b$ la c este același cu restul împărțirii lui $r_1 + r_2$ la c, iar restul împărțirii lui $a \cdot b$ la c este egal cu restul împărțirii lui $r_1 \cdot r_2$ la c.
7. Să se găsească cel mai mic număr natural care împărțit la -7 să dea restul 3 și împărțit la 11 să dea restul 2.
8. Dacă n este un număr întreg, atunci n^2 este de forma $4k$ sau $8k + 1$, $k \in \mathbb{Z}$.
9. Să se determine restul împărțirii lui $1^n + 2^n + 4^n$ la 3 ($n \in \mathbb{N}$).

§ 2. Divizibilitatea numerelor întregi. Proprietăți

Definiția 2.1. Fie a și b două numere întregi. Spunem că b divide pe a (sau a este *divizibil* prin b, sau b este un *divizor* al lui a, sau a este un *multiplu* al lui b) dacă există un număr întreg c, astfel încît $a = bc$.

Pentru a scrie că b îl divide pe a, vom folosi notația $b \mid a$*.

Exemple

1) Fie $a \in \mathbb{Z}$; cum $a = 1 \cdot a = (-1) \cdot (-a)$, rezultă că ± 1, $\pm a$ sînt divizori ai lui a.

2) Dacă $a = 60$, divizorii lui 60 sînt: ± 1, ± 2, ± 3, ± 5, ± 6, ± 10, ± 12, ± 15, ± 20, ± 30, ± 60.

Observație. Dacă $a \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$, atunci numărul divizorilor lui a sînt în număr finit.

Într-adevăr, dacă d este un divizor al lui a, există $b \in \mathbb{Z}$, astfel încît $a = d \cdot b$. Rezultă că $|a| = |d| \cdot |b|$. Cum $b \neq 0$, atunci $|b| \geqslant 1$ și deci $0 < |d| \leqslant a$. Prin urmare divizorii lui a sînt printre numerele $\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm a$ și sînt în număr finit (cel mult $2 \cdot |a|$).

Divizibilitatea numerelor întregi are următoarele proprietăți:

1° este *reflexivă*, adică $a \mid a$, oricare ar fi întregul a.

Într-adevăr, avem $a = a \cdot 1$.

2° este *tranzitivă*, adică $a \mid b$ și $b \mid c$ implică $a \mid c$.

Într-adevăr, din $a \mid b$ și $b \mid c$ rezultă existența unor numere întregi k_1, k_2 cu proprietatea

$$b = ak_1,\ c = bk_2,$$

de unde obținem $c = (ak_1)k_2 = a(k_1k_2)$ și notînd

$$k = k_1k_2 \in \mathbb{Z},\ \text{avem } c = ak, \text{ adică } a \mid .$$

3° Dacă a și b sînt numere întregi cu proprietatea $a \mid b$ și $b \mid a$, atunci $a = \pm b$ (adică $|a| = |b|$).

Într-adevăr, fie c_1, c_2 numere întregi astfel încît $b = ac_1$ și $a = bc_2$. Atunci $b = bc_1c_2$ și deci $b(1 - c_1c_2) = 0$. Rezultă că, fie $b = 0$, fie $c_1c_2 = 1$. În primul

* În unele manuale și culegeri de probleme se folosește și notația $a \vdots b$, pentru a scrie că a este divizibil prin b.

caz, din $b \mid a$ deducem $a = 0 = b$, iar în al doilea caz, deoarece $c_1, c_2 \in \mathbf{Z}$, vom avea $c_1 = c_2 = \pm 1$, prin urmare $a = \pm b$.

4° Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sînt numere întregi și d este un număr întreg care divide pe fiecare a_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, atunci d divide orice combinație liniară de $a_1, a_2, \ldots, a_n$, adică $d \mid \sum_{i=1}^{n} l_i a_i$, oricare ar fi $l_1, l_2, \ldots, l_n$ numere întregi.

Într-adevăr, există $k_1, k_2, \ldots, k_n$ numere întregi cu proprietatea $a_i = dk_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, de unde rezultă:

$$\sum_{i=1}^{n} l_i a_i = \sum_{i=1}^{n} dl_i k_i. \text{ Notînd } k = \sum_{i=1}^{n} l_i k_i \in \mathbf{Z},$$

obținem $\sum_{i=1}^{n} l_i a_i = dk$, adică $d \mid \sum_{i=1}^{n} l_i a_i$.

Exerciții

1. Fie $a, b, c \in \mathbf{Z}$ astfel încît $a + b = c$. Să se arate că dacă $d \in \mathbf{Z}$ divide două dintre numerele date, atunci el îl divide și pe al treilea.
2. Să se găsească toate numerele întregi $a \in \mathbf{Z}$, care au exact $2 \cdot |a|$ divizori.
3. Dacă $a, b \in \mathbf{Z}$ și 3 nu divide nici pe a nici pe b, atunci 3 divide pe $a - b$ sau 3 divide pe $a + b$.
4. Să se arate că $1\,000^k - 1$ este divizibil cu 37, oricare ar fi $k \in \mathbf{N}$.
5. Să se arate că dacă $p \in \mathbf{N}$, $p > 3$, are proprietatea că p și $2p + 1$ nu sînt divizibile cu 3, atunci $4p + 1$ este divizibil cu 3.
6. Să se arate că numărul $9^{20} - 7^{20}$ este divizibil cu 10.
7. a) Să se arate că oricum ar fi date trei numere întregi, există două cu suma divizibilă cu 2.
   b) Să se arate că oricum ar fi date 5 numere întregi, există 3 cu suma divizibilă cu 3.
   c) Să se arate că oricum ar fi date 9 numere întregi, există 5 cu suma divizibilă cu 5.
8. Să se arate că dacă $n \in \mathbf{N}$, atunci $n^2 \mid (n + 1)^n - 1$.
9. Să se găsească toate numerele întregi n cu proprietatea $n + 1 \mid n^2 + 1$.
10. Să se găsească toate numerele întregi n cu proprietatea $n - 3 \mid n^3 - 3$.
11. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_{11} \in \mathbf{Z}$. Să se arate că există printre aceste numere întregi cîteva cu suma divizibilă cu 10.
12. Să se arate că numărul $6^{20} - 5^{20}$ este divizibil cu 11.

§ 3. Cel mai mare divizor comun

Definiția 3.1. Se numește *divizor comun* al numerelor întregi a și b un număr întreg c cu proprietatea:

$$c \mid a \text{ și } c \mid b.$$

Vom numi un *cel mai mare divizor comun* (pe scurt c.m.m.d.c.) al numerelor întregi a și b, un număr întreg d care verifică următoarele condiții:

i) d este un divizor comun al lui a și b (adică $d \mid a$ și $d \mid b$)

ii) orice alt divizor comun d' al lui a și b divide neapărat pe d (adică $d' \mid a$ și $d' \mid b$ implică $d' \mid d$).

Teorema 3.2. Fie a și b două numere întregi. Atunci există un c.m.m.d. al lui a și b.

Demonstrație. În cazul în care $a = b = 0$, c.m.m.d.c. este 0. Deci putem presupune, de exemplu, $b \neq 0$. Aplicînd teorema împărțirii cu rest a numerelor întregi a și b, rezultă existența a două numere întregi q_1 și r_1 cu proprietatea că

$$a = bq_1 + r_1, \; 0 \leqslant r_1 < |b|. \tag{1}$$

Dacă $r_1 = 0$ atunci $b \mid a$ și c.m.m.d.c. al numerelor a și b este b. Într-adevăr, $b \mid b$ și $b \mid a$, iar dacă d' este divizor comun al lui a și b, în particular, satisface și $d' \mid b$. Deci b este un c.m.m.d.c. al lui a și b.

Dacă $r_1 \neq 0$, aplicăm teorema împărțirii cu rest numerelor b și r_1 și obținem numerele întregi q_2, r_2 satisfăcînd

$$b = r_1 q_2 + r_2, \text{ cu } 0 \leqslant r_2 < r_1. \tag{2}$$

Repetînd acest procedeu, obținem numerele întregi $q_3, \ldots, q_m, \ldots$ și $r_3, \ldots, r_m, \ldots$ astfel încît

$$\begin{cases} r_1 = r_2 q_3 + r_3, \text{ cu } 0 \leqslant r_3 < r_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{m-2} = r_{m-1} q_m + r_m, \text{ cu } 0 \leqslant r_m < r_{m-1}, \\ r_{m-1} = r_m q_{m+1} + r_{m+1}, \text{ cu } 0 \leqslant r_{m+1} < r_m. \end{cases} \tag{3}$$

Deoarece $r_1 > r_2 > \ldots > r_m \ldots$, există un număr natural n astfel încît $r_n \neq 0$ și $r_{n+1} = 0$.

Vom arăta că r_n este un c.m.m.d.c. al lui a și b.

Întrucît $r_{n-1} = r_n q_{n+1}$, rezultă că $r_n \mid r_{n-1}$.

Din egalitatea $r_{n-2} = r_{n-1} q_n + r_n$ rezultă că $r_n \mid r_{n-2}$. În continuare, din egalitatea $r_{n-3} = r_{n-2} q_{n-1} + r_{n-1}$ și ținînd cont că r_n divide pe r_{n-1} și pe r_{n-2}, rezultă că r_n divide pe r_{n-3}. În felul acesta, din aproape în aproape, ținînd cont de egalitățile (3), obținem că r_n divide pe $r_{n-1}, r_{n-2}, \ldots, r_2, r_1$. Apoi din egalitatea (2) rezultă că r_n divide pe b și deoarece r_n divide și pe r_1, obținem datorită relației (1) că r_n divide pe a. Prin urmare r_n este divizor comun al lui a și b.

Fie acum d' un număr întreg cu proprietatea că $d' \mid a$ și $d' \mid b$. Din egalitatea (1) vom avea

$r_1 = a - bq_1$ și deci $d' \mid r_1$.

Apoi din egalitatea (2) obținem

$r_2 = b - r_1 q_2$ și deoarece $d' \mid b$, $d' \mid r_1$, obținem că $d' \mid r_2$.

Folosind egalitățile (3) obținem, din aproape în aproape, că d' divide fiecare din numerele întregi $r_3, r_4, \ldots, r_{n-1}, r_n$. Așadar, în cazul în care b nu-l divide pe a avem că r_n, ultimul rest nenul din șirul de egalități (1), (2), (3), este un cel mai mare divizor comun al numerelor a și b.

Demonstrația acestei teoreme pune în evidență următoarea regulă de obținere a c.m.m.d.c. a două numere, care se numește *algoritmul lui Euclid*:

Pentru a obține c.m.m.d.c. a două numere întregi a și b, cu $b \neq 0$, împărțim pe a la b; dacă restul împărțirii r_1 este zero, atunci b este c.m.m.d.c.; dacă nu, împărțim pe b la restul împărțirii anterioare, r_1, și obținem restul r_2; apoi împărțim pe r_1 la r_2 și obținem un nou rest r_3 ș.a.m.d. Ultimul rest nenul este c.m.m.d.c. al celor două numere.

Observații. 1) Dacă d este un c.m.m.d.c. al numerelor întregi a și b, atunci și $-d$ este un c.m.m.d.c. al lui a și b. Dacă d' ar fi tot un c.m.m.d.c. al lui a și b, atunci vom avea $d \mid d'$ și $d' \mid d$, prin urmare $d' = \pm d$. Rezultă deci că există întotdeauna două și numai două numere întregi cu proprietatea celui mai mare divizor comun al numerelor a și b. Aceste două numere sînt egale în modul și de semn contrar. Acela dintre ele care este pozitiv îl vom nota cu (a, b). Se observă că prin algoritmul lui Euclid se obține tocmai (a, b).

2) Din definiţia c.m.m.d.c. rezultă că

$$(a, b) = (b, a) = (-a, b) = (a, -b) = (-a, -b) = (|a|, |b|).$$

Observaţia 2) ne permite ca pentru calcularea celui mai mare divizor comun a două numere întregi să ne mărginim la cazul numerelor naturale.

Exemplu. Să se găsească cel mai mare divizor comun al numerelor -810 şi 315.

Soluţie. Avem $(-810, 315) = (810, 315)$.

Vom aplica acum algoritmul lui Euclid:

1) $810 = 315 \cdot 2 + 180$

2) $315 = 180 \cdot 1 + 135$

3) $180 = 135 \cdot 1 + 45$

4) $135 = 45 \cdot 3 + 0$

În acest şir de împărţiri succesive ultimul rest nenul este 45, deci $(-810, 315) = 45$.

Din faptul că c.m.m.d.c. a două numere este unic, abstracţie făcînd de semn, şi folosind egalităţile (1), (2) şi (3), avem:

Teorema 3.3. Dacă a şi b sînt două numere întregi şi d este un cel mai mare divizor comun al lor, atunci există două numere întregi, k şi l, astfel încît $d = ka + lb$.

Definiţia 3.4. Două numere întregi nenule a şi b se numesc *prime între ele* dacă 1 este c.m.m.d.c. al lor.

Observăm că a şi b sînt prime între ele dacă şi numai dacă ± 1 sînt singurii lor divizori comuni.

Exemplu. Numerele 57 şi 25 sînt prime între ele. Într-adevăr, folosind algoritmul lui Euclid, obţinem:

$57 = 25 \cdot 2 + 7$

$25 = 7 \cdot 3 + 4$

$7 = 4 \cdot 1 + 3$

$4 = 3 \cdot 1 + 1$

$3 = 1 \cdot 3 + 0$

şi deci $(57, 25) = 1$.

Observaţii. 1) Fie $a, b \in \mathbf{Z}$ şi $d = (a, b)$ astfel încît $d > 0$. Fie $a = da'$ şi $b = db'$. Atunci a' şi b' sînt prime între ele.

Într-adevăr, fie d' un divizor comun al numerelor a' şi b'. Atunci dd' este un divizor comun al lui a şi b. Deci dd' îl divide pe d, adică există un $d'' \in \mathbf{Z}$ astfel încît $d = dd'd''$. Deci $d'd'' = 1$ şi prin urmare $d' = \pm 1$, ceea ce înseamnă că a' şi b' sînt prime între ele.

2) Din teorema 3.3. obţinem că a este prim cu b dacă şi numai dacă există $k, l \in \mathbf{Z}$ astfel încît $1 = ka + lb$. Într-adevăr, dacă a este prim cu b, atunci $(a, b) = 1$ şi conform teoremei 3.3. obţinem $k, l \in \mathbf{Z}$ astfel încît $1 = ka + lb$. Reciproc, dacă $1 = ka + lb$ şi $d | a$, $d | b$, atunci $d | 1$ şi deci $d = \pm 1$, adică singurii divizori comuni ai lui a şi b sînt ± 1.

Definiţia 3.5. Fie a şi b două numere întregi. Un număr întreg m se numeşte *un cel mai mic multiplu comun* (pe scurt c.m.m.m.c.) al numerelor a şi b, dacă verifică următoarele condiţii:

i) m este un multiplu comun al lui a şi b (adică $a | m$ şi $b | m$),

ii) orice alt multiplu comun al lui a şi b este multiplu al lui m (adică dacă $a | m'$ şi $b | m'$, atunci $m | m'$).

Teorema care urmează ne asigură existenţa celui mai mic multiplu comun şi ne dă în acelaşi timp şi un procedeu de calcul.

Teorema 3.6. Fie a şi b două numere întregi nenule. Dacă d este un c.m.m.d.c. al lui a şi b, atunci $m = \frac{a \cdot b}{d}$ este un c.m.m.m.c. al lui a şi b.

Exemplu. Să se calculeze c.m.m.m.c. al numerelor 4 020, -210.

Soluţie. Pentru a calcula c.m.m.m.c al numerelor 4 020 şi -210 este suficient, conform teoremei 3.6, să calculăm c.m.m.d.c. al numerelor 4 020 şi $|-210|$ cu algoritmul lui Euclid:

$4\,020 = 210 \times 19 + 30$

$210 = 30 \times 7 + 0$

Deci un c.m.m.m.c. al lui 4 020 şi -210 este $\frac{4\,020 \times 210}{30} = 7 \times 4\,020 = 28\,140$.

Exerciţii

1. Să se găsească prin algoritmul lui Euclid cel mai mare divizor comun al numerelor:
a) -180; 756;
b) -375; 360; -900;
c) 0; 779; -399; $5\,700$;
d) $-3\,724$; $18\,468$;
e) -540; 588; -576;
f) 375; 645; -600; $-1\,515$.

2. Să se găsească cel mai mic multiplu comun al numerelor următoare:
a) -960; $1\,200$; b) $30\,295$; $36\,354$; c) $12\,345$; $4\,565$; -960.

3. Să se afle toate numerele prime cu 100 şi mai mici în modul decît 50.

4. Se dau două numere întregi a şi b nenule care au c.m.m.d.c. pe 5, iar cîturile împărţirilor succesive din algoritmul lui Euclid sînt -1, 3, 2. Să se afle a şi b.

5. Să se găsească două numere întregi a şi b astfel încît $(a, b) = 3$ şi $[a, b] = 72$. (C.m.m.m.c. al lui a şi b se notează cu $[a, b]$.)
Este soluţia unică?

6. Să se arate că numerele $2k + 1$ şi $9k + 4$ sînt prime între ele, oricare ar fi $k \in \mathbf{Z}$.

7. Să se găsească c.m.m.d.c. al numerelor $2k - 1$ şi $9k + 4$ în funcţie de numărul întreg k.

8. Să se arate că dacă a şi b sînt numere întregi, d un c.m.m.d.c. al lor, iar $k, l \in \mathbf{Z}$, cu proprietatea că, dacă
$$ka + lb = d, \text{ atunci } (k, l) = 1.$$

9. Să se arate că $(21n + 4, 14n + 3) = 1$, $n \in \mathbf{Z}$.

10. Să se arate că numerele de forma $F_k = 2^{2^k} + 1 (k = 0, 1, 2, \ldots)$ sînt prime două cîte două.

11. Să se arate că pentru orice $n \in \mathbf{N}^*$ avem $(n! + 1, (n + 1)! + 1) = 2$.

§ 4. Numere prime. Teorema de descompunere în factori primi

Definiţia 4.1. Un număr natural $p \geqslant 2$ se numeşte *prim* dacă singurii săi divizori sînt ± 1 şi $\pm p$.

Exemple

Numerele 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 sînt numere prime. Verificarea acestui fapt se poate face efectuînd împărţirea fiecăruia dintre numerele date la numerele naturale mai mici decît el.

Numărul 2 este singurul număr prim par.

În cele ce urmează vom da (fără demonstraţie) două teoreme foarte importante în aritmetică.

Teorema 4.2. Un număr natural $p \geqslant 2$ este *prim* dacă şi numai dacă oricare ar fi a şi b numere întregi astfel încît p divide pe ab, să rezulte că p divide pe a sau p divide pe b.

T e o r e m a 4. 3. (Teorema fundamentală a aritmeticii) Oricare ar fi numărul întreg n, cu $|n| \geqslant 2$, există o descompunere a sa în produs de numere prime, adică există un număr finit de numere prime $p_1, p_2, \ldots, p_m$, nu neapărat distincte, astfel încît

$$n = \pm p_1 p_2 \cdots p_m.$$

În plus, această descompunere este unică, în sensul că oricare altă descompunere în produs de factori primi diferă de ea doar prin ordinea factorilor.

Observație. În teorema 4.3, în reprezentarea numărului n ca produs de factori primi $p_1, p_2, \ldots, p_m$, este posibil ca unii dintre factori să fie egali între ei: p_1 poate să apară de α_1 ori, cu $\alpha_1 \geqslant 1$, p_2 de α_2 ori, cu $\alpha_2 \geqslant 1$, și în general p_k de α_k ori, cu $\alpha_k \geqslant 1$. Dacă numărul factorilor primi distincți este l, atunci vom avea:

$$n = \pm p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_l^{\alpha_l}, \text{ unde putem presupune } p_1 < p_2 < \ldots < p_l. \qquad (1)$$

Scrierea lui n în forma (1) se numește *descompunerea lui n în factori primi*. Teorema fundamentală a aritmeticii se mai numește *teorema de descompunere în factori primi*.

Exemplu. Numărul întreg $-5\,600$ se poate scrie ca produs de factori primi în felul următor: $-5\,600 = -2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 = -2^5 \cdot 5^2 \cdot 7$.

Aplicație. Să se arate că șirul numerelor prime este infinit.

Soluție. Să presupunem prin reducere la absurd că ar exista numai un număr finit de numere prime $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Fie $p = p_1 p_2 \ldots p_n + 1$. Dar p admite conform teoremei 4.3 un divizor prim, fie acesta p_k. Pe de altă parte împărțirea lui p la p_k dă restul 1 deoarece

$$p = p_k q + 1, \; q \in \mathbf{N}.$$

Am ajuns deci la o contradicție. Presupunerea că mulțimea numerelor prime este finită este falsă, deci există o infinitate de numere prime.

Cu ajutorul teoremei fundamentale a aritmeticii putem da un alt procedeu de calcul al c.m.m.d.c. a două sau mai multor numere întregi.

Se scriu descompunerile acestor numere în produse de factori primi și c.m.m.d.c. al lor va fi produsul factorilor primi comuni acestor numere, fiecare ridicat la puterea cea mai mică la care apare în descompunerile respective.

Pentru a demonstra acest lucru este suficient să considerăm cazul în care avem două numere întregi a și b. Fie d numărul obținut prin procedeul descris. Atunci, din construcția lui d, rezultă evident că $d \mid a$ și $d \mid b$. Dacă $d' \mid a$ și $d' \mid b$ scriem descompunerea lui d' în factori primi. Folosind teorema 4.3 (partea de unicitate) rezultă imediat că d' divide pe d. Deci $d = (a, b)$.

Exemple

1) Fie $a = 360$ și $b = 240$. Avem $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ și $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$ și deci $(360, 240) = 2^3 \cdot 3 \cdot 5 = 120$.

2) Fie $a = 72$, $b = 120$ și $c = 300$. Avem $72 = 2^3 \cdot 3^2$, $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ și $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$ și deci $(72, 120, 300) = 2^2 \cdot 3 = 12$.

Tot din teorema fundamentală a aritmeticii rezultă și un mod de calcul al celui mai mic multiplu comun a două sau a mai multor numere.

Se scriu descompunerile acestor numere în produse de factori primi și c.m.m.m.c. al lor va fi produsul factorilor primi care apar cel puțin într-una din descompuneri, luat fiecare la puterea cea mai mare la care apare în descompunerile respective.

De *exemplu*, fie numerele $a = 72$, $b = 120$ și $c = 300$. Deoarece $72 = 2^3 \cdot 3^2$, $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ și $300 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$, atunci $[72, 120, 300] = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 = 1\,800$.

În continuare vom face cîteva observații asupra șirului numerelor prime. Dacă $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$ și nu este prim, atunci el admite un divizor prim $p \leqslant \sqrt{n}$.

Într-adevăr, cum n nu este prim, avem $n = a \cdot b$ cu $a, b > 1$. Evident, putem presupune că $a \leqslant b$. Atunci $a^2 \leqslant ab = n$, de unde $a \leqslant \sqrt{n}$. Dar din teorema fundamentală a aritmeticii a are un divizor prim p, care este la rîndul său divizor al lui n și, mai mult, $p \leqslant a \leqslant \sqrt{n}$.

În concluzie, pentru a dovedi că un număr natural $n \geqslant 2$ este prim este suficient să verificăm că el nu are divizori primi mai mici decît $\sqrt{n}$.

De *exemplu*, fie $n = 97$. Cum $\sqrt{97} < 10$, avem de considerat numerele prime < 10, adică 2, 3, 5, 7. Se vede imediat că nici unul dintre aceste numere nu divide pe 97.

Ciurul lui Eratostene. Vom da în cele ce urmează o metodă de obținere a numerelor prime mai mici decît un număr dat $n \geqslant 2$. Această metodă este cunoscută încă din antichitate sub numele de *ciurul lui Eratostene*, după numele matematicianului grec care a dat-o. Considerăm mai întîi șirul tuturor numerelor naturale de la 2 la n. Apoi, deoarece 2 este primul număr prim p_1, vom înlătura din șir toate numerele mai mari decît p_1, și divizibile cu $p_1 = 2$. Primul dintre numerele rămase este $3 = p_2$. Acum vom înlătura din șir toate numerele mai mari decît p_2 și divizibile cu p_2. Primul număr rămas este $5 = p_3$. Să presupunem că după pasul k am aflat numărul prim p_k (al k-lea ca mărime între numerele prime). Vom înlătura din șir toate numerele prime mai mari decît p_k și prime cu p_k. Primul număr care nu a fost înlăturat va fi p_{k+1}, al $(k + 1)$-lea număr prim.

Acest procedeu se termină la pasul m, unde p_m este cel mai mare număr prim $\leqslant \sqrt{n}$.

Exerciții

1. Care dintre următoarele numere întregi sînt prime: 3 477, 2 003, 1 213, 2 099, 3 649, 847, 1 493, 2 027, 2 261, 6 959, 9 689, 10 627.
2. Folosind teorema fundamentală a aritmeticii, să se găsească cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun al următoarelor numere:
   a) 319 și 407; b) 333 și 504; c) 27, 24 și 15; d) 24, 48, 64, 192; e) 325, 526, 169 și 1 014.
3. Să se determine cel mai mic număr natural care are exact 20 de divizori întregi și cel mai mic număr natural care are exact 72 divizori întregi.
4. Să se găsească un număr natural care să aibă exact 15 divizori naturali și singurii săi divizori primi să fie 7 și 11.
5. Fie a și b numere întregi prime între ele. Să se arate că $a + b$ și $a - b$ sînt prime cu ab. Să se arate că, în plus, dacă a și b au parități diferite, atunci $a + b$ este prim cu $a - b$ cu $a^3 - b^3$.
6. Dacă a și b sînt numere naturale nenule și suma lor este un număr prim, atunci a este prim cu b.
7. Să se arate că dacă $a, b, c \in \mathbf{Z}$ și $a \mid c$, $b \mid c$, $(a, b) = 1$, atunci $ab \mid c$.
8. Să se arate că dacă $a, b, c \in \mathbf{Z}$ au proprietatea că a este prim cu b și cu c, atunci a este prim cu bc.
9. Să se arate că dacă $b \mid ac$ atunci $b \mid (a, b)\,(c, b)$.
10. Să se arate că dacă d este un c.m.m.d.c. al numerelor a și b, atunci d^3 este un c.m.m.d.c. al lui a^3 și b^3. Reciproca este adevărată?
11. Fie $r \in \mathbf{Q}$ cu proprietatea că r^m este un număr întreg, $m \in \mathbf{N}^*$. Să se arate că r este întreg.
12. Fie $a, b, m \in \mathbf{N}$ cu proprietatea că $(a, b) = 1$ și $\sqrt[m]{ab} \in \mathbf{N}$. Să se arate că $\sqrt[m]{a}, \sqrt[m]{b} \in \mathbf{N}$.
13. Să se arate că numerele de forma $8^n + 1$ nu sînt prime $(n \in \mathbf{N}^*)$.
14. Să se arate că există o infinitate de numere naturale n, cu proprietatea că $(n, 2^n - 1) > 1$. Să se găsească cel mai mic dintre ele.
15. Să se arate că nu există numere naturale prime n astfel încît $n \mid 2^n - 1$.
16. Să se arate că există numere întregi de forma 3^n, care scrise în bază zecimală au ultimele cifre 00001.
17. Să se arate că există numere întregi care au ultimele cifre 1978 și care să fie divizibile cu 1979.

IV Polinoame cu coeficienți complecși

§ 1. Mulțimea polinoamelor cu coeficienți complecși

1.1. Definirea polinoamelor

Fie $\mathbb{C}^{(N)}$ mulțimea șirurilor (infinite) de numere complexe

$$f = (a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots),$$

care *au numai un număr finit de termeni* a_i, *nenuli*, adică există un număr natural m, astfel încît $a_i = 0$ pentru orice $i > m$.

De *exemplu*, șirurile $f = (0, -1, 2, 0, 0, \dots)$; $g = (-1, i, 2, 0, 0, \dots)$; $h = (1+2i, 7, -100, 2, 0, 0, \dots)$ sînt șiruri infinite care au un număr finit de termeni nenuli. Într-adevăr, șirul $f = (0, -1, 2, 0, 0, \dots)$ are numai 2 termeni nenuli; șirul $g = (-1, i, 2, 0, 0, \dots)$ are 3 termeni nenuli, iar șirul $h = (1 + 2i, 7, -100, 2, 0, 0, \dots)$ are 4 termeni nenuli. Deci aceste șiruri sînt elemente din mulțimea $\mathbb{C}^{(N)}$.

Definim pe mulțimea $\mathbb{C}^{(N)}$ două operații algebrice: *adunarea* și *înmulțirea*.

Fie $f = (a_0, a_1, a_2, \dots)$, $g = (b_0, b_1, b_2, \dots)$ două elemente din mulțimea $\mathbb{C}^{(N)}$; atunci definim

$$f + g = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots) \text{ și} \tag{1}$$

$$fg = (c_0, c_1, c_2, \dots), \tag{2}$$

unde

$$c_0 = a_0b_0,$$

$$c_1 = a_0b_1 + a_1b_0,$$

$$c_2 = a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0,$$

....

$$c_r = a_0b_r + a_1b_{r-1} + a_2b_{r-2} + \dots + a_rb_0 = \sum_{i=0}^{r} a_rb_{r-i} = \sum_{i+j=r} a_ib_j.$$

Să observăm că $f + g$ și fg aparțin mulțimii $\mathbb{C}^{(N)}$.

Într-adevăr, cum $f \in \mathbb{C}^{(N)}$, există un număr natural m, astfel încît $a_i = 0$ pentru orice $i > m$. Cum $g \in \mathbb{C}^{(N)}$, există un număr natural n, astfel încît $b_j = 0$ pentru orice $j > n$. În acest caz avem $a_k = 0$ și $b_k = 0$ pentru orice $k > \max(m, n)$ și deci $a_k + b_k = 0$ pentru orice $k > \max(m, n)$. Deci $f + g$ este un element din $\mathbb{C}^{(N)}$.

Fie $r > m + n$; atunci $r - m > n$. În acest caz $c_r = a_0b_r + a_1b_{r-1} + \dots + a_mb_{r-m} + a_{m+1}b_{r-m-1} + \dots + a_rb_0$. Cum $r - m > n$, atunci $b_r, b_{r-1}, \dots, b_{r-m}$ sînt toți nuli. Pe de altă parte și numerele $a_{m+1}, a_{m+2}, \dots, a_r$ sînt nule și deci $c_r = 0$. În concluzie, pentru orice $r > m + n$ avem $c_r = 0$ și deci fg este de asemenea un element din $\mathbb{C}^{(N)}$.

Elementul $f + g = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$ se numește *suma* dintre f și g, iar operația prin care oricăror elemente f și g din mulțimea $\mathbb{C}^{(N)}$ se asociază suma lor, se numește *adunare*.

Elementul $fg = (c_0, c_1, c_2, \dots)$ se numește *produsul* dintre f și g, iar operația prin care elementelor f și g din mulțimea $\mathbb{C}^{(N)}$ se asociază produsul lor, se numește *înmulțire*.

Exemplu. Dacă $f = (-1, 2, 3, -5, 0, 0, \dots)$ și $g = (1, 0, -1, 0, \dots)$, atunci suma lor este $f + g = (0, 2, 2, -5, 0, 0, \dots)$, iar produsul lor este $fg = (-1 \cdot 1, -1 \cdot 0 + 2 \cdot 1, (-1) \cdot (-1) + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 1, -1 \cdot 0 + 2(-1) + 3 \cdot 0 + (-5) \cdot 1, -1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) + (-5) \cdot 0 + 0 \cdot 1, (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + (-5) \cdot (-1), 0, 0, \dots) = (-1, 2, 4, -7, -3, 5, 0, \dots)$.

Definiție. Fiecare element al mulțimii $\mathbb{C}^{(N)}$, pe care sînt definite cele două operații precedente (1) și (2), se numește polinom. Dacă $f = (a_0, a_1, a_2, \dots)$ este un polinom, numerele $a_0, a_1, a_2, \dots$ se numesc coeficienții lui f.

Vom nota cu $\mathbb{C}'$ submulțimea lui $\mathbb{C}^{(N)}$ formată din toate șirurile de forma

$$(a, 0, 0, 0, \dots) \text{ unde } a \in \mathbb{C}.$$

Funcția $\varphi: \mathbb{C} \to \mathbb{C}'$ definită prin egalitatea

$$\varphi(a) = (a, 0, 0, 0, \dots)$$

este o funcție bijectivă. Mai mult, operațiile de adunare (1) și înmulțire (2) a polinoamelor ce aparțin mulțimii $\mathbb{C}'$ se transcriu astfel:

$$(a, 0, 0, \dots) + (b, 0, 0, 0, \dots) = (a + b, 0, 0, 0, \dots) \text{ și} \tag{3}$$

$$(a, 0, 0, \dots) \cdot (b, 0, 0, 0, \dots) = (ab, 0, 0, 0, \dots)$$

Relațiile (3) ne arată că adunarea și înmulțirea pe $\mathbb{C}'$ se fac după aceleași reguli ca adunarea și înmulțirea numerelor complexe. Din acest motiv rezultă că $\mathbb{C}'$ are aceleași proprietăți aritmetice ca mulțimea $\mathbb{C}$ a numerelor complexe. Acest *fapt ne permite să identificăm polinomul* $(a, 0, 0, \dots)$ *cu numărul complex* a. Așadar punem $(a, 0, 0, \dots) = a$. Datorită acestei identificări avem $\mathbb{C} \subset \mathbb{C}^{(N)}$. Polinoamele de forma $(a, 0, 0, \dots) = a$ se numesc *polinoame constante*.

Observație. Definirea polinoamelor precum și operația de identificare a polinoamelor de forma $(a, 0, 0, \dots)$ cu numărul a, ne reamintesc de modul cum am definit mulțimea numerelor complexe precum și de operația de identificare a numerelor complexe de forma $(a, 0)$ cu numărul real a (a se vedea manualul de Algebră clasa a IX-a).

1.2. Proprietățile adunării polinoamelor

1° *Adunarea este comutativă*, adică oricare ar fi f și g, din $\mathbb{C}^{(N)}$, avem

$$f + g = g + f.$$

Într-adevăr, dacă $f = (a_0, a_1, a_2, \dots)$, $g = (b_0, b_1, b_2, \dots)$, avem $f + g = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$ și $g + f = (b_0 + a_0, b_1 + a_1, \dots)$. Cum adunarea numerelor complexe este comutativă avem $a_i + b_i = b_i + a_i$ pentru orice $i \geqslant 0$. Deci $f + g = g + f$.

2° *Adunarea este asociativă*, adică oricare ar fi f, g și h din $\mathbb{C}^{(N)}$, avem

$$(f + g) + h = f + (g + h).$$

Într-adevăr, dacă $f = (a_0, a_1, a_2, \dots)$, $g = (b_0, b_1, b_2, \dots)$, $h = (c_0, c_1, c_2, \dots)$, atunci $f + g = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots)$ și deci $(f + g) + h = ((a_0 + b_0) + c_0, (a_1 + b_1) + c_1, (a_2 + b_2) + c_2, \dots)$. Analog, obținem că $f + (g + h) = (a_0 + (b_0 + c_0), a_1 + (b_1 + c_1), a_2 + (b_2 + c_2), \dots)$. Cum operația de adunare a numerelor complexe este asociativă, avem $(a_i + b_i) + c_i = a_i + (b_i + c_i)$, pentru orice $i \geqslant 0$. Deci $(f + g) + h = f + (g + h)$.

3° *Element neutru*. Polinomul constant $0 = (0, 0, 0, \ldots)$ este element neutru pentru adunarea polinoamelor, în sensul că oricare ar fi $f \in \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$, avem.

$$f + 0 = 0 + f = f.$$

Într-adevăr, dacă $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$, atunci $f + 0 = (a_0, a_1, a_2, \ldots) + (0, 0, 0, \ldots) = (a_0 + 0, a_1 + 0, a_2 + 0, \ldots) = (a_0, a_1, a_2, \ldots) = f$. După proprietatea 1° avem și $0 + f = f$.

4° *Orice polinom are un opus*, adică oricare ar fi $f \in \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ există un polinom, notat cu $-f$, astfel încît

$$f + (-f) = (-f) + f = 0.$$

Într-adevăr, dacă $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$, atunci $-f = (-a_0, -a_1, \ldots)$, deoarece $f + (-f) = (a_0, a_1, a_2, \ldots) + (-a_0, -a_1, -a_2, \ldots) = (a_0 + (-a_0), a_1 + (-a_1), a_2 + (-a_2), \ldots) = (0, 0, 0, \ldots) = 0$. Conform proprietății 1° avem și $(-f) + f = 0$.

De *exemplu*, dacă $f = (-1, 0, 2, 2, 0, 0, \ldots)$ este un polinom, atunci opusul său este $-f = (1, 0, -2, -2, 0, 0, \ldots)$.

Observație. Dacă f și g sînt două polinoame, suma $f + (-g)$ se notează, simplu, prin $f - g$ și se numește *diferența dintre* f *și* g. Operația prin care oricăror două polinoame f și g li se asociază diferența lor se numește *scădere*.

Dacă $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ și $g = (b_0, b_1, b_2, \ldots)$, atunci

$$f - g = (a_0 - b_0, a_1 - b_1, a_2 - b_2, \ldots).$$

De *exemplu*, dacă $f = (2, -3, -1, 0, 0, \ldots)$ și $g = (-1, -1, -1, 2, 0, \ldots)$, atunci $f - g = (3, -2, 0, -2, 0, 0, \ldots)$.

1.3. Proprietățile înmulțirii polinoamelor

1° *Înmulțirea este comutativă*, adică oricare ar fi f și g din $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$, avem

$$fg = gf.$$

Într-adevăr, dacă $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ și $g = (b_0, b_1, b_2, \ldots)$, atunci notînd $fg = (c_0, c_1, c_2, \ldots)$ și $gf = (d_0, d_1, d_2, \ldots)$ avem $c_r = a_0b_r + a_1b_{r-1} + a_2b_{r-2} + \ldots + a_rb_0$ și $d_r = b_0a_r + b_1a_{r-1} + \ldots + b_ra_0$. Cum adunarea și înmulțirea numerelor complexe sînt comutative și asociative, avem $c_r = d_r$ pentru orice $r \geqslant 0$ și deci $fg = gf$.

2° *Înmulțirea este asociativă*, adică oricare ar fi f, g și h din $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$, avem

$$(fg)h = f(gh).$$

Într-adevăr, fie $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$, $g = (b_0, b_1, b_2, \ldots)$ și $h = (c_0, c_1, c_2, \ldots)$. Să notăm $fg = (d_0, d_1, d_2, \ldots)$ și $(fg)h = (e_0, e_1, e_2, \ldots)$. Atunci $d_r = \sum\limits_{i+j=r} a_ib_j$ pentru orice $r \geqslant 0$ și $e_n = \sum\limits_{r+k=n} d_rc_k$. Deci $e_n = \sum\limits_{r+k=n} \left(\sum\limits_{i+j=r} a_ib_j\right) c_k = \sum\limits_{i+j+k=n} a_ib_jc_k$.

Dacă notăm $gh = (d'_0, d'_1, d'_2, \ldots)$ și $f(gh) = (e'_0, e'_1, e'_2, \ldots)$, în mod analog se obține $d'_s = \sum\limits_{j+k=s} b_jc_k$ pentru orice $s \geqslant 0$ și $e'_n = \sum\limits_{i+s=n} a_id'_s$. Deci, $e'_n = \sum\limits_{i+s=n} a_i \left(\sum\limits_{j+k=s} b_jc_k\right) = \sum\limits_{i+j+k=n} a_ib_jc_k$. Comparînd, obținem că $e_n = e'_n$ și deci $f(gh) = (fg)h$.

3° *Element neutru*. Polinomul $1 = (1, 0, 0, \ldots)$ este element neutru pentru înmulțire, adică oricare ar fi $f \in \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$, avem

$$f \cdot 1 = 1 \cdot f = f.$$

Într-adevăr, dacă $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$, atunci $f \cdot 1 = (a_0, a_1, a_2, \ldots)(1, 0, 0, \ldots) = (a_0 \cdot 1, a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot 1, a_0 \cdot 0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 1, \ldots) = (a_0, a_1, a_2, \ldots) = f$. După proprietatea 1° avem de asemenea $1 \cdot f = f$.

4° *Înmulțirea este distributivă față de adunare*, adică oricare ar fi polinoamele $f, g, h \in \mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$, au loc relațiile:

$$f(g + h) = fg + fh \text{ și}$$

$$(f + g)h = fh + gh.$$

Într-adevăr, fie $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$, $g = (b_0, b_1, b_2, \ldots)$ și $h = (c_0, c_1, c_2, \ldots)$. Atunci $f(g + h) = (a_0, a_1, a_2, \ldots)(b_0 + c_0, b_1 + c_1, b_2 + c_2, \ldots) = (a_0(b_0 + c_0), a_0(b_1 + c_1) + a_1(b_0 + c_0), \ldots, \sum\limits_{i=0}^{r} a_i(b_{r-i} + c_{r-i}), \ldots) = ((a_0b_0 + a_0c_0), (a_0b_1 + a_1b_0) + (a_0c_1 + a_1c_0), \ldots, \sum\limits_{i=0}^{r} a_ib_{r-i} + \sum\limits_{i=0}^{r} a_ic_{r-i}, \ldots) = (a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, \ldots, \sum\limits_{i=0}^{r} a_ib_{r-i}, \ldots) + (a_0c_0, a_0c_1 + a_1c_0, \ldots, \sum\limits_{i=0}^{r} a_ic_{r-i}, \ldots) = fg + fh$.

5° *Dacă f și g sînt polinoame nenule, atunci produsul lor este un polinom nenul* ($f \neq 0$ și $g \neq 0 \Rightarrow fg \neq 0$).

Într-adevăr, fie $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ și $g = (b_0, b_1, b_2, \ldots)$. Cum $f \neq 0$ există un termen $a_i \neq 0$. Fie m cel mai mare număr natural astfel încît $a_m \neq 0$. Rezultă că $a_i = 0$ pentru orice $i > m$. Analog pentru $g \neq 0$, fie n cel mai mare număr natural astfel încît $b_n \neq 0$. Rezultă că $b_j = 0$ oricare ar fi $j > n$. Să presupunem că $fg = (c_0, c_1, c_2, \ldots)$. Atunci $c_{m+n} = a_0b_{m+n} + a_1b_{m+n-1} + \ldots + a_mb_n + a_{m+1}b_{n-1} + \ldots + a_{m+n}b_0$. Cum $b_{m+n} = b_{m+n-1} = \ldots = b_{n+1} = 0$ și $a_{m+1} = a_{m+2} = \ldots = a_{m+n} = 0$, atunci $c_{m+n} = a_mb_n$. Cum $a_m \neq 0$ și $b_n \neq 0$, atunci $c_{m+n} = a_mb_n \neq 0$ și deci $fg \neq 0$.

5° *Simplificarea cu un factor nenul*. Dacă f, g, h, sînt polinoame astfel încît $fg = fh$ și $f \neq 0$, atunci $g = h$.

Într-adevăr, cum $fg = fh$, obținem $fg - fh = 0$ și deci $f(g - h) = 0$. Cum $f \neq 0$, din proprietatea 5° trebuie ca $g - h = 0$, adică $g = h$.

§ 2. Forma algebrică a polinoamelor

Notația $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ introdusă pentru polinoame nu este prea comodă în operațiile cu polinoame. De aceea vom folosi altă scriere pentru polinoame. Convenim să notăm polinomul $(0, 1, 0, 0, \ldots)$ prin „X" și citim „*nedeterminata* X".

Înmulțirea polinoamelor ne dă:

$$X^2 = X \cdot X = (0, 1, 0, \ldots)(0, 1, 0, 0, \ldots) = (0, 0, 1, 0, \ldots),$$

$$X^3 = X \cdot X^2 = (0, 1, 0, \ldots)(0, 0, 1, 0, \ldots) = (0, 0, 0, 1, 0, \ldots),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$X^n = X \cdot X^{n-1} = (0, 1, 0, \ldots)(\underbrace{0, 0, \ldots 0}_{n-1 \text{ ori}}, 1, 0, \ldots) = (\underbrace{0, 0, \ldots 0}_{n \text{ ori}}, 1, 0, \ldots)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Folosind acum adunarea și înmulțirea definite pe $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$, pentru $f = (a_0, a_1, a_2, \ldots)$ putem scrie

$$f = (a_0, a_1, a_2, \ldots) = (a_0, 0, \ldots) + (0, a_1, 0, \ldots) + (0, 0, a_2, 0, \ldots) + \ldots + (0, 0, \ldots, 0, a_i, 0, \ldots) + \ldots = (a_0, 0, \ldots) + (a_1, 0, \ldots) \cdot (0, 1, 0, \ldots) + (a_2, 0, \ldots) \cdot (0, 0, 1, 0, \ldots) + \ldots + (a_i, 0, \ldots) \cdot (\underbrace{0, 0, \ldots 0}_{n \text{ ori}}, 1, 0, \ldots) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_iX^i + \ldots$$

(unde există doar un număr finit de termeni nenuli).

Deci

$$f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_iX^i + ... = \sum_{i \geq 0} a_iX^i. \quad (1)$$

Cum $f = (a_0, a_1, a_2, ...)$ este un element din $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$, există un număr natural m astfel încît $a_i = 0$ pentru orice $i > m$. În acest caz (1) se scrie sub forma

$$f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_mX^m = \sum_{i=0}^{m} a_iX^i, \quad (1')$$

unde $a_0, a_1, a_2, ..., a_m$ sînt coeficienţii polinomului f.

Polinoamele de forma aX^n unde $a \in \mathbb{C}$ şi n este un număr natural se numesc *monoame*. Din (1′) rezultă că orice polinom nenul este o *sumă finită de monoame nenule.*

Datorită scrierii (1) sau (1′) pentru polinoame, se adoptă pentru *mulţimea* $\mathbb{C}^{(\mathbb{N})}$ *notaţia* $\mathbb{C}[X]$. În particular, avem incluziunea $\mathbb{C} \subseteq \mathbb{C}[X]$. Datorită scrierii (1) sau (1′) elementele din $\mathbb{C}[X]$ se mai numesc polinoame într-o singură nedeterminată cu coeficienţi complecşi. De asemenea, dacă $f \in \mathbb{C}[X]$ este un polinom, de multe ori este *util să scriem* $f = f(X)$.

În mulţimea $\mathbb{C}[X]$ distingem următoarele submulţimi importante:

$\mathbb{R}[X]$ = mulţimea polinoamelor cu coeficienţi reali,

$\mathbb{Q}[X]$ = mulţimea polinoamelor cu coeficienţi raţionali,

$\mathbb{Z}[X]$ = mulţimea polinoamelor cu coeficienţi întregi.

Este clar că avem incluziunile

$$\mathbb{Z}[X] \subset \mathbb{Q}[X] \subset \mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X].$$

Exemple. 1) Polinomul $f = \sqrt{2} - 7X^2 + X^3$ este un polinom cu coeficienţi reali.

2) Polinomul $g = \frac{1}{3} - X + \frac{1}{7}X^4$ este un polinom cu coeficienţi raţionali.

3) Polinomul $h = 7 + X^2 - 8X^3$ este un polinom cu coeficienţi întregi.

Observaţii 1) Folosind scrierea (1) a polinoamelor, operaţiile de adunare şi înmulţire se transcriu astfel:

dacă $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_rX^r + ...$ şi $g = b_0 + b_1X + ... + b_rX^r + ...$,

atunci

$$f + g = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)X + (a_2 + b_2)X^2 + ... + (a_r + b_r)X^r + ..., \quad (2)$$

$$fg = a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)X + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)X^2 + ... \quad (3)$$

$$... + (a_0b_r + a_1b_{r-1} + a_2b_{r-2} + ... + a_rb_0)X^r + ...$$

De *exemplu*, dacă $f = -1 + 2X + X^2$ şi $g = 1 - X$, atunci

$$f + g = (-1 + 2X + X^2) + (1 - X) = X + X^2 \text{ şi}$$

$$fg = (-1 + 2X + X^2) \cdot (1 - X) = -1 + 3X - X^2 - X^3.$$

2) Se observă din relaţiile (2) şi (3) că dacă f, g sînt polinoame cu coeficienţi reali (respectiv raţionali, întregi), atunci suma şi produsul lor este un polinom cu coeficienţi reali (respectiv raţionali, întregi).

3) În practică, ori de cîte ori avem de înmulţit două polinoame este foarte comod să folosim proprietatea înmulţirii de a fi distributivă faţă de adunare. De exemplu, fie polinoamele $f = 1 + X + X^2$ şi $g = 1 - X$. Produsul lor se calculează astfel:

$$fg = (1 + X + X^2)(1 - X) = 1 - X + X - X^2 + X^2 - X^3 = 1 - X^3.$$

§ 3. Gradul unui polinom

Am văzut în paragraful precedent că orice polinom $f \in \mathbb{C}[X]$ este o sumă finită de monoame, adică

$$f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n.$$

Se numeşte *gradul lui f, notat prin grad f, cel mai mare număr natural n astfel încît* $a_n \neq 0$. În acest caz a_n se numeşte coeficientul *dominant al polinomului f.* Numărul a_0 se numeşte *termenul liber al polinomului f.* De multe ori este foarte utilă şi scrierea lui f sub forma $f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + ... + a_1X + a_0$, lucru întotdeauna posibil ţinînd seama că adunarea polinoamelor este comutativă.

Exemple

1) Polinomul $f = 1 - X$ are gradul 1, adică grad $f = 1$.

2) Polinomul $f = X + X^3 - X^5$ are gradul 5, adică grad $f = 5$.

3) Polinomul constant $f = a$ unde $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$ are gradul 0, deci grad $f = 0$.

Pentru polinomul nul, 0, *gradul său se consideră ca fiind egal cu* $-\infty$ (se citeşte minus infinit).

Referitor la gradul sumei şi produsului a două polinoame f şi g au loc următoarele relaţii:

i)* grad $(f + g) \leq$ max (grad f, grad g);

ii) dacă f şi g sînt polinoame nenule, atunci

grad (fg) = grad f + grad g.

Într-adevăr, să presupunem că grad $f = m$ şi grad $g = n$. Atunci f şi g sînt de forma $f = a_0 + a_1X + ... + a_mX^m$ şi $g = b_0 + b_1X + ... + b_nX^n$. Dacă $m > n$, atunci gradul sumei $f + g$ este m, deoarece termenul de grad maxim din $f + g$ este a_mX^m.

Dacă $m = n$, termenul de grad maxim din $f + g$ este $(a_m + b_m)X^m$ în cazul cînd $a_m + b_m \neq 0$ sau mai mic în cazul cînd $a_m + b_m = 0$.

Aşadar, grad $(f + g) \leq$ max (grad f, grad g).

În produsul fg, termenul de grad maxim este monomul $(a_mX^m)(b_nX^n) = a_mb_nX^{m+n}$ (a se vedea proprietatea 5° din § 1). Cum f şi g sînt polinoame nenule, atunci $a_m \neq 0$ şi $b_n \neq 0$. Deci $a_mb_n \neq 0$ şi în concluzie grad $(fg) = m + n$ = grad f + grad g.

§ 4. Valoarea unui polinom. Funcţia polinomială

Fie $f = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$ un polinom arbitrar şi α un număr complex arbitrar. Atunci numărul

$$f(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_1\alpha^2 + ... + a_n\alpha^n$$

se numeşte *valoarea polinomului f în* α.

Exemple

1) Fie polinomul $f = 2X^3 - 5X^2 + X - 7$. Valoarea lui f în 1 este $f(1) = 2 \cdot 1^3 - 5 \cdot 1^2 + 1 - 7 = -9$.

Valoarea lui f în -1 este $f(-1) = 2(-1)^3 - 5(-1)^2 + (-1) - 7 = -15$.

2) Fie polinomul $g = X^4 - iX + 1$. Valoarea lui g în i este $g(i) = i^4 - i \cdot i + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$.

De asemenea valoarea lui g în $1 + i$ este

$$g(1 + i) = (1 + i)^4 - i(1 + i) + 1 = -4 - i + 1 + 1 = -2 - i.$$

---

* Pentru ca i) să rămînă adevărată şi în cazul cînd lucrăm cu polinomul nul, convenim să punem $-\infty < a$, $-\infty + a = -\infty$ şi $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$ pentru orice număr natural a.

Observație. Dacă f este un polinom cu coeficienții reali (respectiv raționali, întregi) și a este un număr real (respectiv rațional, întreg), atunci valoarea polinomului f în a, $f(a)$ este un număr real (respectiv rațional, întreg).

Vom enunța acum proprietățile cele mai importante ale valorii unui polinom: *Dacă f și g sînt două polinoame și a un număr arbitrar atunci*

i) $(f+g)(a) = f(a) + g(a)$;

ii) $(fg)(a) = f(a)g(a)$;

iii) *Dacă f este un polinom cu coeficienți reali și z un număr complex, atunci*

$$f(\bar{z}) = \overline{f(z)},$$

unde $\bar{z}$ desemnează conjugatul lui z, iar $\overline{f(z)}$ conjugatul lui $f(z)$;

iv) *Dacă f este un polinom cu coeficienți raționali și a, $b \in \mathbf{Q}$ astfel încît $\sqrt{b}$ nu este rațional, atunci $f(a \pm \sqrt{b})$ este* de forma $A \pm B\sqrt{b}$, *unde A, $B \in \mathbf{Q}$. Mai mult, dacă $f(a+\sqrt{b})$ este numărul $A + B\sqrt{b}$, atunci $f(a-\sqrt{b})$ este numărul $A - B\sqrt{b}$ și reciproc.*

Primele două proprietăți rezultă direct din definiția sumei și produsului a două polinoame.

Să demonstrăm proprietatea iii). Vom folosi proprietățile conjugatului unui număr complex, adică:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2,$$

$$\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2.$$

Fie acum polinomul $f = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$, unde $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ sînt numere reale. Atunci $f(z) = a_0 + a_1z + ... + a_nz^n$, de unde $\overline{f(z)} = \bar{a}_0 + \overline{a_1z} + ... + \overline{a_nz^n} = \bar{a}_0 + \bar{a}_1\bar{z} + \bar{a}_2\bar{z}^2 + ... + \bar{a}_n\bar{z}^n$. Cum $a_0, a_1, ..., a_n$ sînt numere reale, adică $\bar{a}_0 = a_0$, $\bar{a}_1 = a_1, ..., \bar{a}_n = a_n$, atunci $\overline{f(z)} = a_0 + a_1\bar{z} + a_2\bar{z}^2 + ... + a_n\bar{z}^n = a_0 + a_1\bar{z} + a_2(\bar{z})^2 + ... + a_n(\bar{z})^n$, ceea ce ne arată că $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$.

Demonstrăm proprietatea iv). Fie $f = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n$ un polinom cu $a_0, a_1, ..., a_n$ numere raționale. Avem:

$$f(a \pm \sqrt{b}) = a_0 + a_1(a \pm \sqrt{b}) + a_2(a \pm \sqrt{b})^2 + ... + a_n(a \pm \sqrt{b})^n.$$

Utilizînd binomul lui Newton și ținînd cont că pentru orice număr natural m, avem

$$(\sqrt{b})^{2m} = b^m \in \mathbf{Q} \quad \text{și} \quad (\pm\sqrt{b})^{2m+1} = \pm b^m\sqrt{b},$$

atunci rezultă că $f(a+\sqrt{b})$ este de forma $A + B\sqrt{b}$. În plus, dacă $f(a+\sqrt{b}) = A + B\sqrt{b}$, rezultă că $f(a-\sqrt{b}) = A - B\sqrt{b}$.

Exemple

1) Fie polinomul $f = X^4 + X^2 + 1$.

Avem $f(1+i) = (1+i)^4 + (1+i)^2 + 1 = -4 + 2i + 1 = -3 + 2i$. Cum f este un polinom cu coeficienți reali rezultă conform proprietății iii) că $f(1-i) = -3 - 2i$.

2) Fie polinomul $g = X^4 + 2X^2 - 6$.

Avem $g(1+\sqrt{2}) = (1+\sqrt{2})^4 + 2(1+\sqrt{2})^2 - 6 = 17 + 12\sqrt{2} + 2(3+2\sqrt{2}) - 6 = 17 + 16\sqrt{2}$. Deoarece g este un polinom cu coeficienți raționali, atunci conform proprietății iv) rezultă că $g(1-\sqrt{2}) = 17 - 16\sqrt{2}$.

Definiție. Fie A, B două submulțimi ale lui $\mathbf{C}$. O funcție $f: A \to B$ se numește *polinomială* dacă există un polinom $P \in \mathbf{C}[X]$ astfel încît

$$f(a) = P(a), \text{ oricare ar fi } a \in A.$$

Exemple 1) Funcția de gradul întîi

$$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = ax + b\ (a \neq 0)$$

este o funcție polinomială, deoarece există polinomul $P = aX + b$ astfel încît avem $f(\alpha) = P(\alpha)$, oricare ar fi $\alpha \in \mathbf{R}$.

2) Funcția de gradul al doilea

$$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = ax^2 + bx + c;\ a, b, c \in \mathbf{R} \text{ și } a \neq 0$$

este o funcție polinomială, deoarece există polinomul de gradul doi $P = aX^2 + bX + c$ pentru care avem $f(\alpha) = P(\alpha)$, oricare ar fi $\alpha \in \mathbf{R}$.

3) Funcția putere

$$f: \mathbf{R} \to \mathbf{R},\ f(x) = x^n$$

este o funcție polinomială, deoarece există polinomul de gradul n, $P = X^n$ pentru care avem $f(\alpha) = P(\alpha)$, oricare ar fi $\alpha \in \mathbf{R}$.

Fiind dat un polinom arbitrar $f \in \mathbf{C}[X]$ putem să definim funcția $\tilde{f}: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ prin egalitatea $\tilde{f}(\alpha) = f(\alpha)$, oricare ar fi $\alpha \in \mathbf{C}$.

Funcția $\tilde{f}$ este polinomială și se numește *funcția polinomială asociată polinomului f.*

Exerciții

1. Să se calculeze $f + g$, dacă:

a) $f = 1 + X^2 + X^4$ și $g = 1 + X^2 - X^3 - X^4$;

b) $f = \sqrt{2} + (1 - \sqrt{2})X + X^3 - X^4$ și $g = \sqrt{2} + \sqrt{2}X + X^2 + 2X^3 - X^4$;

c) $f = 1 - X + X^2 - X^3 + X^4 - X^5$ și $g = -1 + X - X^2 + X^3 - X^4 + X^5$;

d) $f = (1+i) + (1-i)X + iX^2 - iX^3$ și $g = -i + iX + (1-i)X^2 + (1+i)X^3$.

2. Să se calculeze produsul fg dacă:

a) $f = (1+i) + X$ și $g = (1-i) - X$;

b) $f = 1 - X + X^2 - X^3$ și $g = 1 + X$;

c) $f = 1 - X + X^2 - X^3 + X^4$ și $g = 1 + X$;

d) $f = 1 + X + X^2 + ... + X^n$ și $g = 1 - X$;

e) $f = 2 - i + (3 - i)X + X^2$ și $g = 2 + i + (3 + i)X - iX^2$;

f) $f = 1 - \sqrt{2} + (2 - \sqrt{2})X + X^3$ și $g = 1 + \sqrt{2} + (2 + \sqrt{2})X$.

3. Fie $f = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n$ un polinom cu coeficienți complecși. Notăm cu $\bar{f}$ polinomul $\bar{f} = \bar{a}_0 + \bar{a}_1X + \bar{a}_2X^2 + ... + \bar{a}_nX^n$. Să se arate că polinoamele $f + \bar{f}$; și $f\bar{f}$ sînt cu coeficienți reali.

4. Un polinom $f \in \mathbf{C}[X]$ se zice inversabil dacă și numai dacă există $g \in \mathbf{C}[X]$ astfel încît $fg = 1$. Să se arate că f este inversabil $\Leftrightarrow f \in \mathbf{C}$ și $f \neq 0$.

5. Să se calculeze grad $(f + g)$ dacă:

a) $f = 1 + X + X^2$ și $g = 1 - X - X^2$;

b) $f = 1 - 3X^2 + 7X^5$ și $g = 1 + X + X^4 - 7X^5$;

c) $f = (1+i) + (1-i)X^2 + iX^4$ și $g = i + iX^2 - iX^4$.

6. În raport cu parametrul complex $m \in \mathbf{C}$ să se determine gradul următoarelor polinoame:

a) $f = (m^2 - 3m + 2)X^3 + (m^2 - 4m + 3)X^2 + (m^2 - 1)X + 7$;

b) $f = (m^2 + 1)X^4 + (m^4 - 1)X^2 + 2iX + 1$.

7. Să se arate că pentru orice polinom f de gradul $n \geq 0$ și un număr natural $0 \leq k \leq n$ există un polinom g astfel încît grad $(f + g) = k$.

8. Fie polinomul $f = 1 - 2X + 3X^2 - 4X^3$. Să se calculeze $f(1)$; $f(-1)$; $f(2)$; $f(-2)$; $f(i)$; $f(-i)$; $f(1+i)$; $f(1-i)$; $f(1+\sqrt{2})$; $f(1-\sqrt{2})$.

9. Să se determine polinoamele de gradul al doilea $f = a_0 + a_1X + a_2X^2$, astfel încît $f(1) = -2$; $f(2) = -1$ și $f(3) = 4$.

10. Fie funcția polinomială

$$f : [0, 1] \to [0, 1], f(x) = x^3 + ax + b,$$

unde $a, b \in \mathbf{R}$. Să se arate că în mod necesar $a \leq 0$ și $b \geq 0$.

11. Să se găsească polinoamele $f \in \mathbf{R}[X]$ de gradul al doilea care satisfac condiția:

$$f(a^3) = (f(a))^3, \text{ oricare ar fi } a \in \mathbf{R}.$$

12. Să se arate prin inducție după n că are loc egalitatea:

$$(X + 2X^2 + 3X^3 + ... + nX^n)(1 - X)^2 = nX^{n+2} - (n+1)X^{n+1} + X.$$

§ 5. Împărțirea polinoamelor

5.1. Teorema împărțirii cu rest

Teorema 5.1.1. **Fiind date două polinoame oarecare cu coeficienți complecși f și g cu $g \neq 0$, atunci există două polinoame cu coeficienți complecși q și r astfel încît**

$$f = gq + r \text{ unde grad } r < \text{grad } g. \quad (1)$$

În plus, polinoamele q și r sînt unice satisfăcînd proprietatea (1).

În egalitatea (1) polinomul f se numește *deîmpărțit*, g *împărțitor*, q *cît* iar r *rest*.

Demonstrație. Vom demonstra întîi partea de existență a formulei (1). Fie $n = \text{grad } f$ și $m = \text{grad } g$. Dacă $n < m$ atunci luăm $q = 0$ și $r = f$. Presupunem că $n \geq m$ și că f și g sînt de forma

$$f = a_0 + a_1X + ... + a_nX^n; \quad g = b_0 + b_1X + ... + b_mX^m,$$

unde $a_n \neq 0$ și $b_m \neq 0$. Putem considera polinomul

$$f_1 = f - \frac{a_n}{b_m} X^{n-m} g. \quad (2)$$

În egalitatea (2) termenul de grad maxim a_nX^n al lui f se va reduce și deci grad $f_1 <$ grad f.

Să notăm $n_1 = \text{grad } f_1$. Atunci polinomul f_1 are forma

$$f_1 = a'_{n_1}X^{n_1} + a'_{n_1-1}X^{n_1-1} + ... + a'_0.$$

Dacă $n_1 < m$, atunci punînd $q = \frac{a_n}{b_m} X^{n-m}$ și $r = f_1$, din (2) obținem

$$f = gq + r \text{ unde grad } r = n_1 < m = \text{grad } g.$$

Dacă $n_1 \geq m$, repetăm din nou procedeul de coborîre a gradului, printr-o nouă scădere:

$$f_2 = f_1 - \frac{a'_{n_1}}{b_m} X^{n_1-m} g. \quad (3)$$

Dacă grad $f_2 = n_2$, atunci evident $n_2 < n_1 < m$. Repetînd procedeul de coborîre a gradelor se obține un șir de polinoame $f_1, f_2, ..., f_p, f_{p+1}, ...$ astfel încît

$$f_1 = f - \frac{a_n}{b_m} X^{n-m} g,$$
$$f_2 = f_1 - \frac{a'_{n_1}}{b_m} X^{n_1-m} g, \quad (4)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$f_{p+1} = f_p - \frac{a^{(p)}_{n_p}}{b_m} X^{n_p-m} g,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

unde grad $f >$ grad $f_1 >$ grad $f_2 > ... >$ grad $f_p >$ grad $f_{p+1} > ...$, adică

$$n > n_1 > n_2 > ... > n_p > n_{p+1} > ... .$$

Cum m este număr natural, există p număr natural astfel încît $n_{p+1} < m$. Vom nota $r = f_{p+1}$. Adunînd toate egalitățile (4) obținem

$$f_{p+1} = f - \left[\frac{a_n}{b_m} X^{n-m} + \frac{a'_{n_1}}{b_m} X^{n_1-m} + ... + \frac{a^{(p)}_{n_p}}{b_m} X^{n_p-m}\right] g. \quad (5)$$

Dacă notăm polinomul din paranteză cu q:

$$q = \frac{a_n}{b_m} X^{n-m} + \frac{a'_{n_1}}{b_m} X^{n_1-m} + ... + \frac{a^{(p)}_{n_p}}{b_m} X^{n_p-m},$$

egalitatea (5) se scrie

$$f = gq + r \text{ unde grad } r = n_{p+1} < m = \text{grad } g. \quad (6)$$

Să trecem acum la *demonstrarea părții de unicitate din teoremă*. Presupunem că mai există două polinoame q_1 și r_1 astfel încît

$$f = gq_1 + r_1 \text{ cu grad } r_1 < \text{grad } g.$$

Atunci

$$f = gq + r = gq_1 + r_1, \quad (7)$$

de unde

$$g(q - q_1) = r_1 - r. \quad (7')$$

Dacă $q - q_1 \neq 0$, atunci grad $g(q - q_1) \geq$ grad g. Pe de altă parte, cum grad $(r_1 - r) \leq$ max (grad r_1, grad r) $<$ grad g, obținem o contradicție. Deci trebuie ca $q - q_1 = 0$, adică $q = q_1$. Din egalitatea (7') obținem în acest caz că $r_1 - r = 0$ și deci $r_1 = r$.

Observații 1) Împărțirea cu rest necesită efectuarea celor patru operații aritmetice: adunarea, scăderea, înmulțirea și împărțirea asupra coeficienților polinoamelor f și g. Din aceste motive, dacă polinoamele f și g au *coeficienții numere reale (respectiv raționale), atunci cîtul q și restul r sînt polinoame cu coeficienți reali (respectiv raționali)*. Din egalitatea (6) se vede că dacă polinoamele f și g au coeficienți numere întregi coeficientul termenului de grad maxim al lui g este ± 1, atunci cîtul și restul sînt polinoame cu coeficienți întregi.

2) Egalitățile (2), (3), (4), (5) și (6) se pot expune în tabelul alăturat

$$\overbrace{a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0}^{f} \quad \Big| \quad \overbrace{b_mX^m + b_{m-1}X^{m-1} + \dots + b_0}^{g}$$

$$-a_nX^n - \frac{a_nb_{m-1}}{b_m}X^{n-1} - \dots - \frac{a_nb_0}{b_m}X^{n-m}$$

$$f_1 = a'_{n_1}X^{n_1} + a'_{n_1-1}X^{n_1-1} + \dots + a'_0$$

$$-a'_{n_1}X^{n_1} - \frac{a'_{n_1}b_{m-1}}{b}X^{n_1-1} - \dots - \frac{a'_{n_1}b_0}{b_m}X^{n_1-m}$$

$$f_2 = a^{(2)}_{n_2}X^{n_2} + a^{(2)}_{n_2-1}X^{n_2-1} + \dots + a^{(2)}_0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f_p = a^{(p)}_{n_p}X^{n_p} + \dots + a^{(p)}_0$$

$$-a^{(p)}_{n_p}X^{n_p} - \dots\dots\dots - \frac{a^{(p)}_{n_p}b_0}{b_m}X^{n_p-m}$$

$$f_{p+1} = \underbrace{a^{(p+1)}_{n_{p+1}}X^{n_{p+1}} + \dots + a^{(p+1)}_0}_{r}$$

$$\underbrace{\frac{a_n}{b_m}X^{n-m} + \frac{a'_{n_1}}{b_m}X^{n_1-m} + \dots + \frac{a^{(p)}_{n_p}}{b_m}X^{n_p-m}}_{q}$$

Acest tabel ne redă tocmai regula de împărțire a polinoamelor cunoscută încă din algebra elementară și pe care o vom aplica în practică pentru obținerea cîtului și restului împărțirii.

Exemplu. Fie polinoamele $f = 2X^5 + X^4 - 5X^3 - 8X + 1$ și $g = X^2 - 3$. Să determinăm cîtul și restul împărțirii lui f la g.

$$\overbrace{2X^5 + X^4 - 5X^3 - 8X + 1}^{f} \quad \Big| \quad \overbrace{X^2 - 3}^{g}$$

$$-2X^5 \qquad + 6X^3 \qquad\qquad \Big| \quad \underbrace{2X^3 + X^2 + X + 3}_{q}$$

$$X^4 + X^3 - 8X + 1$$

$$-X^4 + 3X^2$$

$$X^3 + 3X^2 - 8X + 1$$

$$-X^3 \qquad + 3X$$

$$3X^2 - 5X + 1$$

$$-3X^2 \qquad + 9$$

$$\underbrace{-5X + 10}_{r}$$

Deci cîtul este $q = 2X^3 + X^2 + X + 3$ iar restul $r = -5X + 10$. Formula împărțirii cu rest se scrie în acest caz astfel:

$$2X^5 + X^4 - 5X^3 - 8X + 1 = (X^2 - 3)(2X^3 + X^2 + X + 3) + (-5X + 10).$$

5.2. Împărțirea prin $X - a$. Schema lui Horner

Un caz foarte important în aplicații este împărțirea unui polinom $f \neq 0$ prin binomul $X - a$. Vom demonstra următoarea teoremă:

Teorema 5.2.1. Restul împărțirii unui polinom $f \neq 0$ prin binomul $X - a$ este egal cu valoarea $f(a)$ a polinomului f în a.

Demonstrație. Aplicînd formula împărțirii cu rest pentru polinoamele f și $g = X - a$ obținem egalitatea:

$$f = (X - a)q + r, \text{ unde grad } r < \text{grad } (X - a) = 1. \qquad (1)$$

Deci grad $r \leqslant 0$, adică restul împărțirii este un număr complex.

Dacă în egalitatea (1) facem $X = a$, obținem egalitatea

$$f(a) = (a - a)q(a) + r(a),$$

de unde $f(a) = r(a)$. Cum r este un polinom constant atunci $r(a) = r$ și deci

$$r = f(a).$$

Această *teoremă ne ajută să găsim restul împărțirii unui polinom oarecare prin polinomul $X - a$ fără a mai face împărțirea.*

Exemple

1) Să se găsească restul împărțirii polinomului $f = X^3 - 2X^2 + X + 1$ prin binomul $X - 2$.

Conform teoremei de mai sus, restul împărțirii este $r = f(2) = 2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2 + 1 = 3$.

2) Să se găsească restul împărțirii polinomului $f = X^4 - 2iX^3 + 4X + 1 + 2i$ prin binomul $X + i$.

Conform teoremei de mai sus, restul este

$$r = f(-i) = (-i)^4 - 2i(-i)^3 + 4(-i) + 1 + 2i = 1 + 2 - 4i + 1 + 2i = 4 - 2i.$$

Teorema de mai sus are dezavantajul că nu ne spune nimic asupra cîtului împărțirii polinomului f prin binomul $X - a$.

Vom indica acum un procedeu de aflare a cîtului împărțirii polinomului f prin binomul $X - a$.

Să presupunem că f este un polinom de forma

$$f = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0.$$

Dacă scriem formula împărțirii cu rest pentru polinoamele f și $X - a$ obținem egalitatea

$$f = (X - a)q + r. \qquad (2)$$

Cum grad $f = n$, atunci trebuie ca grad $q = n - 1$. Deci q este un polinom de forma

$$q = b_{n-1}X^{n-1} + b_{n-2}X^{n-2} + \dots + b_0.$$

Egalitatea (2) devine în acest caz

$$a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0 = (X - a)(b_{n-1}X^{n-1} + b_{n-2}X^{n-2} + \dots + b_0) + r.$$

Efectuînd înmulțirea în partea dreaptă obținem

$$(X - a)(b_{n-1}X^{n-1} + b_{n-2}X^{n-2} + \dots + b_0) = b_{n-1}X^n + b_{n-2}X^{n-1} + \dots +$$
$$+ b_0X - ab_{n-1}X^{n-1} - ab_{n-2}X^{n-2} - \dots - ab_0 = b_{n-1}X^n + (b_{n-2} - ab_{n-1})X^{n-1} +$$
$$+ (b_{n-3} - ab_{n-2})X^{n-2} + \dots + (b_0 - ab_1)X - ab_0.$$

Înlocuind în (2) obținem egalitatea

$$a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \dots + a_0 = b_{n-1}X^n + (b_{n-2} - ab_{n-1})X^{n-1} +$$
$$+ (b_{n-3} - ab_{n-2})X^{n-2} + \dots + (b_0 - ab_1)X + (r - ab_0).$$

Din egalitatea celor două polinoame obținem că

$$\begin{cases} a_n = b_{n-1} \\ a_{n-1} = b_{n-2} - ab_{n-1} \\ a_{n-2} = b_{n-3} - ab_{n-2}, \\ \dots\dots\dots\dots \\ a_1 = b_0 - ab_1, \\ a_0 = r - ab_0. \end{cases} \qquad (3)$$

Din egalitățile (3) obținem succesiv

$$\begin{cases} b_{n-1} = a_n, \\ b_{n-2} = a_{n-1} + ab_{n-1}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ b_0 = a_1 + ab_1, \\ r = a_0 + ab_0. \end{cases} \qquad (4)$$

Egalitățile (4) se trec în tabelul următor

(5)

	X^n	X^{n-1}	X^{n-2}	....	X^1	X^0
	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	....	a_1	a_0
a	a_n	$a_{n-1} + ab_{n-1}$	$a_{n-2} + ab_{n-2}$	....	$a_1 + ab_1$	$a_0 + ab_0$
	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	....	b_0	r

În rîndul de sus al tabelului se scriu coeficienții polinomului f, iar în rîndul de jos coeficienții $b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_0$ ai cîtului și restul r.

Tabelul (5) poartă denumirea de *schema lui Horner*. Din schema lui Horner coeficienții cîtului se determină astfel: mai întîi coeficientul termenului de grad maxim $n-1$, b_{n-1} care este egal cu a_n, apoi coeficientul termenului de grad $n-2$, b_{n-2} care este egal cu $a_{n-1} + ab_{n-1}$, apoi coeficientul termenului de grad $n-3$, b_{n-3} care este egal cu $a_{n-2} + ab_{n-2}$ ș.a.m.d.

Exemple: 1) Utilizînd schema lui Horner să se determine cîtul și restul împărțirii polinomului

$$f = 2X^4 - 5X^3 - 8X + 1 \text{ prin binomul } X - 2.$$

Facem schema lui Horner

	X^4	X^3	X^2	X	X^0
	2	-5	0	-8	1
2	2	$-5 + 2\cdot 2 = -1$	$0 + 2(-1) = -2$	$-8+2(-2)=-12$	$1+2(-12)=-23$
	b_3	b_2	b_1	b_0	r

Deci cîtul și restul împărțirii sînt:

$$q = 2X^3 - X^2 - 2X - 12 \text{ și } r = -23.$$

2) Utilizînd schema lui Horner, să se determine cîtul și restul împărțirii polinomului $f = X^6 - X^5 + X^4 + 2X^3 - X^2 - 3$ prin binomul $X + 1$.

Facem schema lui Horner

	X^6	X^5	X^4	X^3	X^2	X	X^0
	1	-1	1	2	-1	0	-3
-1	1	$-1+(-1)1=-2$	$1+(-1)(-2)=3$	$2+(-1)\cdot 3=-1$	$-1+(-1)\cdot(-1)=0$	$0+0=0$	-3
	b_5	b_4	b_3	b_2	b_1	b_0	r

Deci cîtul și restul împărțirii sînt:

$$q = X^5 - 2X^4 + 3X^3 - X^2 \text{ și } r = -3.$$

Observație. Schema lui Horner ne oferă nu numai un procedeu de obținere a cîtului împărțirii polinomului f prin binomul $X - a$, dar și un procedeu de determinare a restului.

Exerciții

1. Să se determine cîtul și restul împărțirii polinomului f prin binomul g dacă:
a) $f = X^6 - X^5 - X^4 + X^3 - 2X^2 + 5X - 4$, $g = X^2 - 2X + 3$;
b) $f = X^4 - 6X^3 - 8X^2 + 1$, $g = X^3 - X + 1$;
c) $f = X^4 - 2X^2 + 2$; $g = X^2 - 2X + 2$;
d) $f = X^5 - 2X^4 + 3X^3 - 4X^2 + 5X - 6$, $g = X^3 - X^2 + 2X - 3$;
e) $f = X^7 - 3X^6 + 2X^5 + 2X^4 - 2X^3 - 2X^2 + 3X - 1$, $g = X^2 - 2X + 1$;
f) $f = X^{22} - X^{17} + X^{10} + X^5 + 2X^2 + 2$, $g = X^2 + X + 1$.

2. Să se afle un polinom de gradul trei astfel încît împărțit la $X^2 - 3X$ dă restul $6X - 15$ și împărțit la $X^2 - 5X + 8$ dă restul $2X - 7$.

3. Să se arate că dacă f și g dau prin împărțirea lor la h resturile r_1, respectiv r_2, atunci pentru orice $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$, polinomul $\alpha f + \beta g$ dă prin împărțire la h restul $\alpha r_1 + \beta r_2$.

4. Ce condiții trebuie să îndeplinească numerele m, p, q ca restul împărțirii polinomului $X^4 + pX^2 + q$ la polinomul $X^2 + mX + 1$ să fie zero?

5. Aplicînd schema lui Horner să se determine cîtul și restul împărțirii polinomului f prin g dacă:
a) $f = X^4 - 3X^3 - 2X^2 - 6X + 1$, $g = X - 1$;
b) $f = X^6 - X^5 + 3X^3 - 6X + 2$, $g = X + 1$;
c) $f = X^5 - X^4 - 2X^3 + X^2 - X - 2$, $g = X - 2$;
d) $f = X^5 - 2X^4 - X^3 + 2X^2 - 2$, $b = X + 2$;
e) $f = X^6 - X^5 - X^4 + 6X - 1$, $g = X + \frac{1}{2}$;
f) $f = 2X^3 + 8X^2 - 4X + 2$, $g = 2X + 1$;
g) $f = 3X^4 + 2X^3 - 4X^2 + 6X + 6$, $g = 3X - 1$.

6. Să se afle un polinom de grad cît mai mic astfel încît împărțit la $X + 1$ să dea restul -1 și împărțit la $X - 1$ să dea restul 1.

7. Să se determine parametrul m astfel încît polinomul $f = 2X^4 - mX^3 + X^2 - 7$ împărțit la $X + 2$ să dea restul 4.

8. Să se determine parametrul m astfel încît polinomul $f = X^5 - mX^4 + (m^2 - 2)X^3 + mX^2 - 1$ împărțit la $X - 1$ să dea restul 7.

9. Să se determine parametrii a și b astfel încît polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX + 1$ împărțit la $X - 1$ să dea restul 1 și împărțit la $X + 1$ să dea restul -5.

10. Să se determine un polinom $f = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$ astfel încît împărțit la $X^2 - 3X + 1$ să dea restul $2X + 1$ și împărțit la $X^2 - 1$ să dea restul $-2X + 2$.

§ 6. Divizibilitatea polinoamelor

6.1. Definiția relației de divizibilitate. Proprietăți

Definiția 6. 1. 1. Fie f și g două polinoame. Spunem că polinomul g *divide* polinomul f (sau f este *divizibil* prin g, sau g este un *divizor al lui f*, sau încă f este *un multiplu al lui g*) dacă există un polinom h astfel încît

$$f = gh.$$

Cînd polinomul g divide polinomul f notăm simbolic $g \mid f$.

Exemplu. Să considerăm polinoamele $f = X^3 - 27$ și $g = X - 3$. Cum $X^3 - 27 = (X - 3)(X^2 + 3X + 9)$, rezultă că $g \mid f$.

Cîteva proprietăți ale relației de divizibilitate a polinoamelor:

1° *Din teorema împărțirii cu rest rezultă că g divide pe f dacă și numai dacă restul împărțirii lui f la g este zero.*

2° *Dacă $g \mid f$ și $f \neq 0$ atunci grad $g \leqslant$ grad f.*

Într-adevăr, cum $g \mid f$ există un polinom h astfel încît $f = gh$. Deoarece $f \neq 0$, atunci grad f = grad g + grad h. Dar grad $h \geqslant 0$ şi deci grad $g \leqslant$ grad f.

3° *Polinoamele de grad 0, adică constantele nenule, divid orice polinom.*

Într-adevăr, dacă $a \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$ şi f este un polinom oarecare putem scrie

$$f = \left(a \frac{1}{a}\right) f = a\left(\frac{1}{a} f\right) \text{ şi deci } a \mid f.$$

4° *Dacă f este un polinom şi $a \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$ atunci $af \mid f$.*

Într-adevăr, $f = \left(\frac{1}{a} a\right) f = \frac{1}{a}(af)$ şi deci $af \mid f$.

Dacă f este un polinom, divizorii de forma a şi af unde $a \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$ se numesc *divizori improprii* ai polinomului f. *Divizorii* care nu sînt improprii se numesc *divizori proprii.*

5° *Relaţia de divizibilitate:*

i) este **reflexivă,** *adică $f \mid f$ oricare ar fi polinomul f.*

Într-adevăr, $f = f \cdot 1$.

ii) este **tranzitivă,** *adică dacă $h \mid g$ şi $g \mid f$, atunci $h \mid f$.*

Într-adevăr, cum $h \mid g$, atunci există un polinom h_1 astfel încît $g = hh_1$. Cum $g \mid f$, există un polinom g_1 astfel încît $f = gg_1$. Înlocuind în această egalitate pe $g = hh_1$, obţinem că $f = (hh_1)g_1 = h(h_1g_1)$ şi deci $h \mid f$.

iii) *Dacă $g \mid f_1$ şi $g \mid f_2$, iar h_1, h_2 sînt două polinoame arbitrare, atunci*

$$g \mid h_1f_1 + h_2f_2.$$

Într-adevăr, cum $g \mid f_1$, există polinomul g_1 astfel încît $f_1 = gg_1$; cum $g \mid f_2$, există polinomul g_2 astfel încît $f_2 = gg_2$. Dar atunci avem

$$h_1f_1 + h_2f_2 = h_1(gg_1) + h_2(gg_2) = g(h_1g_1 + h_2g_2) \text{ şi deci } g \mid h_1f_1 + h_2f_2.$$

iv) *Dacă $g \mid f$ şi $f \mid g$, atunci există $a \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$ astfel încît*

$$f = ag.$$

Într-adevăr, cum $g \mid f$, există polinomul h_1 astfel încît

$$f = gh_1. \tag{1}$$

Cum $f \mid g$, există polinomul h_2 astfel încît

$$g = fh_2. \tag{2}$$

Dacă $g = 0$, atunci din egalitatea (1) obţinem că $f = 0$. În acest caz putem alege $a = 1$.

Analog, dacă $f = 0$ din (2) rezultă că $g = 0$.

Putem presupune acum $f \neq 0$ şi $g \neq 0$. Din (1) şi (2) obţinem

$$g = fh_2 = (gh_1)h_2 = g(h_1h_2).$$

Cum $g \neq 0$ atunci $h_1h_2 = 1$ şi deci grad $(h_1h_2) = 0$, adică grad h_1 + grad $h_2 = 0$. Cum grad $h_1 \geqslant 0$ şi grad $h_2 \geqslant 0$, rezultă că grad h_1 = grad $h_2 = 0$. Deci $h_1 = a \in \mathbf{C}$ cu $a \neq 0$. În acest caz egalitatea (1) devine

$$f = ag \text{ cu } a \in \mathbf{C},\ a \neq 0.$$

Două polinoame f şi g pentru care $f \mid g$ şi $g \mid f$ se numesc *asociate în divizibilitate* (sau, pe scurt, *asociate*).

Cînd polinoamele f şi g sînt asociate notăm simbolic $f \overset{d}{\sim} g$.

Rezultă din proprietăţile 5° *iv)* şi 4° că, $f \overset{d}{\sim} g$ dacă şi numai dacă există $a \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$, astfel încît $f = ag$.

Exemple. 1) Polinoamele $f = X^2 + 1$ şi $g = \frac{1}{3}X^2 + \frac{1}{3}$ sînt asociate în divizibilitate deoarece $f = 3 \cdot g$.

2) Polinoamele $f = X^2 - X + 2$ şi $g = 2X^2 - 2X + 4$ sînt asociate în divizibilitate deoarece $f = \frac{1}{2} g$.

6.2. Cel mai mare divizor comun al polinoamelor

Definiţia 6.2.1. Fie f şi g două polinoame. Un polinom d se numeşte *un cel mai mare divizor comun* (pe scurt, *un c.m.m.d.c.*) al polinoamelor f şi g, dacă verifică următoarele condiţii:
i) d este un divizor comun al lui f şi g adică $d \mid f$ şi $d \mid g$;
ii) orice alt divizor comun d' al lui f şi g divide neapărat şi polinomul d (adică dacă $d' \mid f$ şi $d' \mid g$ atunci $d' \mid d$).

Teorema 6.2.2. Dacă f şi g sînt două polinoame, atunci există un c.m.m.d.c. al lui f şi g.

Demonstraţie. În cazul $f = g = 0$, conform definiţiei 6.2.1, polinomul nul este un c.m.m.d.c. al lor. Aşadar putem presupune că $f \neq 0$. Dacă $g = 0$, atunci f este un divizor comun al lui f şi g deoarece $f = f \cdot 1$ şi $g = f \cdot 0$. Dacă d' este un divizor comun al lui f şi g, atunci d' este în particular un divizor al lui f. Deci f este un c.m.m.d.c. al lui f şi g.

Să considerăm cazul cînd $g \neq 0$. Aplicînd teorema împărţirii cu rest polinoamelor f şi g, găsim două polinoame q_1, r_1, astfel încît

$$f = gq_1 + r_1, \text{ cu grad } r_1 < \text{grad } g. \tag{1}$$

Dacă $r_1 \neq 0$, aplicăm teorema împărţirii cu rest polinoamelor g şi r_1 şi obţinem polinoamele q_2, r_2 astfel încît

$$g = r_1q_2 + r_2, \text{ cu grad } r_2 < \text{grad } r_1. \tag{2}$$

Repetînd acest procedeu, obţinem polinoamele $q_3, q_4, \ldots, q_n, \ldots$ şi $r_3, r_4, \ldots r_n, \ldots$, astfel încît

$$\begin{cases} r_1 = r_2q_3 + r_3, \text{ cu grad } r_3 < \text{grad } r_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n, \text{ cu grad } r_n < \text{grad } r_{n-1}, \\ r_{n-1} = r_nq_{n+1} + r_{n+1}, \text{ cu grad } r_{n+1} < \text{grad } r_n. \end{cases} \tag{3}$$

Cum grad $r_1 >$ grad $r_2 > \ldots >$ grad $r_n >$ grad $r_{n+1} > \ldots$, există un număr natural n astfel încît $r_n \neq 0$ şi $r_{n+1} = 0$.

Vom arăta că r_n este un c.m.m.d.c. al lui f şi g.

Cum $r_{n-1} = r_nq_{n+1}$, rezultă că $r_n \mid r_{n-1}$. Acum, deoarece $r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n$, rezultă că $r_n \mid r_{n-2}$. În continuare folosind egalitatea $r_{n-3} = r_{n-2}q_{n-1} + r_{n-1}$ şi ţinînd cont că $r_n \mid r_{n-1}$ şi $r_n \mid r_{n-2}$, rezultă că $r_n \mid r_{n-3}$. Din aproape în aproape, ţinînd cont de egalităţile (3), rezultă că r_n divide polinoamele $r_{n-1}, r_{n-2}, \ldots, r_2, r_1$. Din egalitatea (2) rezultă că $r_n \mid g$, iar din egalitatea (1) obţinem $r_n \mid f$. Deci r_n este un divizor comun al polinoamelor f şi g. Fie acum d un divizor comun al polinoamelor f şi g. Din (1) obţinem $r_1 = f - gq_1$. Folosind proprietatea 5° iii) obţinem $d \mid r_1$. Din egalitatea (2) obţinem $r_2 = g - r_1q_1$. Cum $d \mid r_1$ şi $d \mid g$, atunci $d \mid r_2$. Acum folosind egalităţile (3), din aproape în aproape, obţinem că d divide polinoamele $r_3, r_4, \ldots, r_{n-1}, r_n$.

Aşadar r_n (ultimul rest nenul) este un c.m.m.d.c. al polinoamelor f şi g.

Rezumînd cele demonstrate în această teoremă putem enunța următoarea regulă de obținere a c.m.m.d.c. a două polinoame care poartă numele de *algoritmul lui Euclid: Pentru a obține c.m.m.d.c. a două polinoame nenule f și g împărțim pe f la g (mai exact împărțim polinomul de grad mai mare la cel de grad mai mic). Dacă restul împărțirii este zero atunci g este c.m.m.d.c.; dacă nu, împărțim pe g la restul împărțirii, pe urmă împărțitorul celei de-a doua împărțiri la noul rest ș.a.m.d. Ultimul rest nenul este c.m.m.d.c. al celor două polinoame.*

Trebuie să facem observația că dacă polinoamele f și g sînt cu *coeficienți numere reale (respectiv, raționale), prin algoritmul lui Euclid obținem un c.m.m.d.c. al lui f și g care este un polinom cu coeficienți numere reale (respectiv raționale).*

Teorema 6.2.2. ne arată că fiind date două polinoame f și g există un c.m.m.d.c. al lor. Mai mult, ne indică și un procedeu de obținere a acestui c.m.m.d.c.

Se pune întrebarea dacă c.m.m.d.c. este unic determinat.

Acest lucru este lămurit de următoarea teoremă:

Teorema 6.2.3. Fie f, g două polinoame și d un c.m.m.d.c. al lui f și g. Atunci:
1° Dacă $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, atunci ad este un c.m.m.d.c. al polinoamelor f și g.
2° Invers, dacă d' este un c.m.m.d.c. al lui f și g există un $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, astfel încît $d' = ad$.

Demonstrație 1° Cum $d \mid f$ și $ad \mid d$ (vezi proprietatea 4°), atunci din proprietatea de tranzitivitate a divizibilității obținem $ad \mid f$. Analog, obținem $ad \mid g$.

Fie d' un divizor comun al lui f și g. Atunci $d' \mid d$ (vezi definiția 6.2.1). Cum $d \mid ad$, atunci din tranzitivitatea divizibilității obținem $d' \mid ad$. Deci ad este un c.m.m.d.c. al lui f și g.

2° Presupunem că și d' este un c.m.m.d.c. al lui f și g. Cum d este un c.m.m.d.c. al lui f și g, din definiția 6.2.1 obținem $d' \mid d$. Schimbînd rolurile lui d și d', tot din definiția 6.2.1 avem și $d \mid d'$.

Din proprietatea 5° și iv) deducem că există $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, astfel încît $d' = ad$.

Observații 1) Teorema 6.2.3 ne spune că c.m.m.d.c. a două polinoame f și g este *unic, abstracție făcînd de un factor constant nenul.*

2) Teorema 6.2.3 ne ajută ca în calculele ce le facem pentru obținerea c.m.m.d.c. a două polinoame cu coeficienți întregi prin algoritmul lui Euclid, să evităm coeficienții fracționari. Mai precis, dacă la una din împărțiri primul termen al vreunui deîmpărțit parțial nu este divizibil prin primul termen al împărțitorului, se pot înmulți toți coeficienții deîmpărțitului cu un număr ales convenabil. De asemenea, dacă toți coeficienții vreunui deîmpărțit sau împărțitor sînt divizibili cu același număr, îi putem împărți cu acel număr.

Exemple. 1) Să se găsească cel mai mare divizor comun al polinoamelor

$$f = X^4 + X^3 - 2X^2 - 4X + 4 \quad \text{și} \quad g = X^3 + X^2 + X - 3.$$

Vom aplica algoritmul lui Euclid. Împărțim pe f la g

$$\begin{array}{r|l} X^4 + X^3 - 2X^2 - 4X + 4 & X^3 + X^2 + X - 3 \\ \cline{2-2} -X^4 - X^3 - X^2 + 3X & X \\ \hline -3X^2 - X + 4 & \end{array}$$

Pentru a evita coeficienții fracționari, vom înmulți în prealabil pe g cu 3 și restul împărțirii cu -1. Împărțim acum împărțitorul la rest

$$\begin{array}{r|l} 3X^3 + 3X^2 + 3X - 9 & 3X^2 + X - 4 \\ \cline{2-2} -3X^3 - X^2 + 3X & X \\ \hline 2X^2 + 7X - 9 & \end{array}$$

Acum, pentru a evita din nou coeficienții fracționari vom înmulți $3X^2 + X - 4$ cu 2 și continuăm operația

$$\begin{array}{r|l} 6X^2 + 2X - 8 & 2X^2 + 7X - 9 \\ \cline{2-2} -6X^2 - 21X + 27 & 3 \\ \hline -19X + 19 & \end{array}$$

Am obținut restul $-19X + 19$. Pentru a evita din nou coeficienții fracționari împărțim pe $-19X + 19$ cu -19 și împărțim împărțitorul la rest

$$\begin{array}{r|l} 2X^2 + 7X - 9 & X - 1 \\ \cline{2-2} -2X^2 + 2X & 2X + 9 \\ \hline 9X - 9 & \\ -9X + 9 & \\ \hline - \quad - & \end{array}$$

Ultimul rest nenul este polinomul $X - 1$ și deci $X - 1$ este c.m.m.d.c. al polinoamelor f și g.

2) Să se afle c.m.m.d.c. al polinoamelor

$$f = X^3 - 2X^2 + 6X - 5, \quad g = X^2 - 1.$$

Prima împărțire din algoritmul lui Euclid:

$$\begin{array}{r|l} X^3 - 2X^2 + 6X - 5 & X^2 - 1 \\ \cline{2-2} -X^3 \qquad + X & X - 2 \\ \hline -2X^2 + 7X - 5 & \\ 2X^2 \qquad - 2 & \\ \hline 7X - 7 & \end{array}$$

A doua împărțire (împărțim $7X - 7$ cu 7):

$$\begin{array}{r|l} X^2 - 1 & X - 1 \\ \cline{2-2} -X^2 + X & X + 1 \\ \hline X - 1 & \\ -X + 1 & \\ \hline - \quad - & \end{array}$$

Ultimul rest nenul este $X - 1$. Deci $X - 1$ este c.m.m.d.c. al polinoamelor date.

3) Să se afle c.m.m.d.c. al polinoamelor:

$$f = X^6 + 2X^4 - 4X^3 - 3X^2 + 8X - 5 \quad \text{și} \quad g = X^5 + X^2 - X + 1$$

Prima împărțire din algoritmul lui Euclid:

$$\begin{array}{r|l} X^6 + 2X^4 - 4X^3 - 3X^2 + 8X - 5 & X^5 + X^2 - X + 1 \\ \cline{2-2} -X^6 \qquad - X^3 + X^2 - X & X \\ \hline 2X^4 - 5X^3 - 2X^2 + 7X - 5 & \end{array}$$

A doua împărțire (înmulțim $X^5 + X^2 - X + 1$ cu 2):

$$\begin{array}{r|l} 2X^5 + 2X^2 - 2X + 2 & 2X^4 - 5X^3 - 2X^2 + 7X - 5 \\ \cline{2-2} -2X^5 + 5X^4 + 2X^3 - 7X^2 + 5X & X + \frac{5}{2} \\ \hline 5X^4 + 2X^3 - 5X^2 + 3X + 2 & \\ -5X^4 + \frac{25}{2}X^3 + 5X^2 - \frac{35}{2}X + \frac{25}{2} & \\ \hline \frac{29}{2}X^3 - \frac{29}{2}X + \frac{29}{2} & \end{array}$$

A treia împărțire $\left(\text{împărțim ultimul rest cu } \frac{29}{2}\right)$:

$$\begin{array}{r|l} 2X^4 - 5X^3 - 2X^2 + 7X - 5 & X^3 - X + 1 \\ \cline{2-2} -2X^4 \qquad + 2X^2 - 2X & 2X - 5 \\ \hline -5X^3 \qquad + 5X - 5 & \\ 5X^3 \qquad - 5X + 5 & \\ \hline - \quad - & \end{array}$$

Ultimul rest nenul este $X^3 - X + 1$. Deci $X^3 - X + 1$ este c.m.m.d.c. al polinoamelor date.

Teorema 6.2.4. Fie f și g două polinoame. Dacă d este un c.m.m.d.c. al lui f și g, atunci există polinoamele u și v astfel încît

$$d = uf + vg.$$

Demonstrație. Am văzut în demonstrația teoremei 6.2.2 că ultimul rest nenul din algoritmul lui Euclid este c.m.m.d.c. al polinoamelor f și g. Deci dacă

$$\begin{array}{ll}(1) & f = gq_1 + r_1,\\ (2) & g = r_1q_2 + r_2,\\ (3) & r_1 = r_2q_3 + r_3,\\ \ldots\ldots & \ldots\ldots\\ (n) & r_{n-2} = r_{n-1}q_n + r_n,\\ (n+1) & r_{n-1} = r_nq_{n+1},\end{array}$$

este șirul de egalități din algoritmul lui Euclid unde ultimul rest nenul este r_n, atunci r_n este c.m.m.d.c. al lui f și g.

Din (1) obținem că $r_1 = u_1f + v_1g$, unde $u_1 = 1$ și $v_1 = -q_1$.

Din (2) obținem că $r_2 = g - r_1q_2 = g - (u_1f + v_1g)q_2 = -(u_1q_2)f + (1 - v_1q_2)g = u_2f + v_2g$, unde $u_2 = -u_1q_2$ și $v_2 = 1 - v_1q_2$.

Continuînd procedeul putem să presupunem că pentru orice i $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ am determinat polinoamele u_i, v_i, astfel încît

$$r_i = u_if + v_ig.$$

Din egalitatea (n) avem că $r_n = r_{n-2} - r_{n-1}q_n$. Cum $r_{n-2} = u_{n-2}f + v_{n-2}g$ și $r_{n-1} = u_{n-1}f + v_{n-1}g$, atunci $r_n = u_{n-2}f + v_{n-2}g - (u_{n-1}f + v_{n-1}g)q_n = (u_{n-2} - u_{n-1}q_n)f + (v_{n-2} - v_{n-1}q_n)g = u_nf + v_ng$, unde am notat $u_n = u_{n-2} - u_{n-1}q_n$ și $v_n = v_{n-2} - v_{n-1}q_n$.

Acum, dacă d este un c.m.m.d.c. al polinoamelor f și g, din teorema 6.2.3 rezultă că există un $a \in \mathbf{C}$, $a \neq 0$ astfel încît $d = ar_n$. Deci $d = au_nf + av_ng = uf + vg$, unde $u = au_n$ și $v = av_n$.

Definiția 6.2.5. **Fie f și g două polinoame. Spunem că f și g sînt *prime între ele* dacă 1 este c.m.m.d.c. al lui f și g.**

Din teorema 6.2.3 rezultă că polinoamele f și g sînt prime între ele dacă singurii divizori comuni ai lui f și g sînt polinoamele constante nenule.

Exemple. 1) Polinoamele $f = X^4 + 1$ și $g = X^3 - 1$ sînt prime între ele. Într-adevăr, să calculăm c.m.m.d.c. al lui f și g folosind algoritmul lui Euclid:

Prima împărțire:

$$\begin{array}{r|l} X^4 + 1 & X^3 - 1 \\ \hline -X^4 + X & X \\ \hline X + 1 & \end{array}$$

A doua împărțire:

$$\begin{array}{r|l} X^3 - 1 & X + 1 \\ \hline -X^3 - X^2 & X^2 - X + 1 \\ \hline -X^2 - 1 & \\ X^2 + X & \\ \hline X - 1 & \\ -X - 1 & \\ \hline -2 & \end{array}$$

Ultimul rest nenul este -2 și deci 1 este un c.m.m.d.c. al lui f și g.

2) Polinoamele $f = X^2 + X + 1$ și $g = X^2 - X + 1$ sînt prime între ele. Într-adevăr, să calculăm c.m.m.d.c. al lui f și g

$$\begin{array}{r|l} X^2 + X + 1 & X^2 - X + 1 \\ \hline -X^2 + X - 1 & 1 \\ \hline 2X & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 2X^2 - 2X + 2 & 2X \\ \hline -2X^2 & X - 1 \\ \hline -2X + 2 & \\ 2X & \\ \hline 2 & \end{array}$$

Ultimul rest nenul fiind 2, atunci c.m.m.d.c. al lui f și g este polinomul 1.

Observații. 1) Fie f și g două polinoame nenule și d un c.m.m.d.c. al lor. Atunci putem scrie $f = df'$ și $g = dg'$. Polinoamele f' și g' *sînt prime între ele.*

Într-adevăr, dacă d' este un c.m.m.d.c. al lui f' și g', atunci dd' este un divizor comun al polinoamelor f și g. Cum d este c.m.m.d.c. al lui f și g, atunci obținem că $dd' | d$. Deci există polinomul d'' astfel încît $d = dd'd''$. Prin urmare, $d'd'' = 1$ și deci d' este un polinom constant ceea ce ne arată că f' și g' sînt prime între ele.

2) Așa cum am definit cel mai mare divizor comun a două polinoame (a se vedea definiția 6.2.1) putem defini c.m.m.d.c. a unui număr finit de polinoame. Mai precis, dacă $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sînt n polinoame, atunci un polinom d se numește un c.m.m.d.c. al polinoamelor $f_1, f_2, \ldots, f_n$ dacă verifică următoarele condiții:

i) $d \mid f_1$, $d \mid d_2, \ldots, d \mid f_n$;

ii) dacă d' este un polinom astfel încît $d' \mid f_1$, $d' \mid f_2, \ldots, d' \mid f_n$ atunci $d' \mid d$.

Fiind date polinoamele $f_1, f_2, \ldots, f_n$ un c.m.m.d.c. al lor se calculează astfel: se determină d_1 un c.m.m.d.c. al polinoamelor f_1 și f_2, apoi se determină d_2 un c.m.m.d.c. al polinoamelor d_1 și f_2, apoi se determină d_3 un c.m.m.d.c. al polinoamelor d_2 și $f_4, \ldots$, apoi se determină d_{n-1} un c.m.m.d.c. al polinoamelor d_{n-2} și f_n. Polinomul $d = d_{n-1}$ este un c.m.m.d.c. al polinoamelor $f_1, f_2, \ldots, f_n$.

6.3. Cel mai mic multiplu comun al polinoamelor

Definiția 6.3.1. **Fie f și g două polinoame. Un polinom m se numește un *cel mai mic multiplu comun* (pe scurt, *un c.m.m.m.c.*) al polinoamelor f și g dacă verifică următoarele condiții:**

i) m este un multiplu al lui f și g, adică $f \mid m$ și $g \mid m$,

ii) orice alt multiplu comun m' al lui f și g este și multiplu al lui m (adică dacă $f \mid m'$ și $g \mid m'$ atunci $m \mid m'$).

Următoarea teoremă ne dă un procedeu de obținere a unui c.m.m.m.c. a două polinoame.

Teorema 6.3.2. **Fie f și g două polinoame dintre care cel puțin unul este nenul. Dacă d este un c.m.m.d.c. al lui f și g, atunci polinomul $m = \frac{fg}{d}$ este un c.m.m.m.c. al lui f și g $\left(\text{aici } \frac{fg}{d} \text{ înseamnă cîtul împărțirii polinomului } fg \text{ prin } d\right)$.**

Demonstrație. Cum $d \mid f$ și $d \mid g$, există polinoamele f' și g' astfel încît $f = df'$ și $g = dg'$. În plus, polinoamele f' și g' sînt prime între ele. Deci $m = f'g = fg'$, ceea ce arată că m este un multiplu comun al lui f și g.

Fie m' un polinom astfel încît $f \mid m$ și $g \mid m'$. Deci există polinoamele f_1 și g_1 astfel încît $m' = ff_1$ și $m' = gg_1$. Avem $m' = df'f_1$ și $m' = dg'g_1$, de unde obținem că $df'f_1 = dg'g_1$. Cum $d \neq 0$, atunci $f'f_1 = g'g_1$. Polinoamele f' și g' fiind prime între ele, există polinoamele u și v astfel încît $1 = uf' + vg'$. Înmulțind această egalitate cu g_1 (de exemplu), obținem că $g_1 = ug_1f' + vg'g_1 = ug_1f' + vf'f_1 = f'(ug_1 + vf_1)$, ceea ce arată că $f' \mid g_1$. Deci există un polinom g_2, astfel încît $g_1 = f'g_2$. Cum $m' = gg'$ atunci $m' = gf'g_2 = mg_2$ și deci $m \mid m'$. Deci polinomul $m = \frac{fg}{d}$ este un c.m.m.m.c. al lui f și g.

Exemplu. Să se determine c.m.m.m.c. al polinoamelor

$$f = 2X^5 - 3X^4 - 5X^3 + X^2 + 6X + 3 \text{ și } g = X^4 - X^3 - X^2 + 1.$$

Aflăm mai întîi c.m.m.d.c. al celor două polinoame folosind algoritmul lui Euclid. Prima împărțire:

$$\begin{array}{r|l} 2X^5 - 3X^4 - 5X^3 + X^2 + 6X + 3 & X^4 - X^3 - X^2 + 1 \\ \underline{-2X^5 + 2X^4 + 2X^3 - 2X \qquad\quad} & 2X - 1 \\ -X^4 - 3X^3 + X^2 + 4X + 3 & \\ \underline{X^4 - X^3 - X^2 + \qquad 1} & \\ -4X^3 \qquad + 4X + 4 & \end{array}$$

Restul $-4X^3 + 4X + 4$ îl împărțim cu -4 și obținem $X^3 - X - 1$.

A doua împărțire:

$$\begin{array}{r|l} X^4 - X^3 - X^2 + 1 & X^3 - X - 1 \\ \underline{-X^4 + X^2 + X \qquad} & X - 1 \\ -X^3 + X + 1 & \\ \underline{X^3 - X - 1} & \\ - \; - & \end{array}$$

Ultimul rest nenul este $X^3 - X - 1$. Deci polinomul $d = X^3 - X - 1$ este un c.m.m.d.c. al polinoamelor f și g. Cum $g = (X^3 - X - 1)(X - 1)$, atunci polinomul

$$m = \frac{fg}{d} = f\frac{g}{d} = f\cdot(X - 1) = (X - 1)(2X^5 - 3X^4 - 5X^3 + X^2 + 6X + 3) =$$

$$= 2X^6 - 5X^5 - 2X^4 + 6X^3 + 5X^2 - 3X - 3$$

este un c.m.m.m.c. al polinoamelor f și g.

Observație. Așa cum am definit c.m.m.m.c. a două polinoame (a se vedea definiția 6.3.1) putem defini c.m.m.m.c. al unui număr finit de polinoame. Mai precis, dacă $f_1, f_2, ..., f_n$ sînt n polinoame, atunci un polinom m se numește un c.m.m.m.c. al polinoamelor $f_1 f_2, ..., f_n$, dacă verifică următoarele condiții:

i) $f_1 | m$, $f_2 | m$, ..., $f_n | m$,

ii) dacă m' este un polinom astfel încît $f_1 | m'$, $f_2 | m'$, ..., $f_n | m'$ atunci $m | m'$.

Teorema 6.3.2 nu se poate extinde la cazul cînd avem n polinoame $f_1, f_2, ..., f_n$ cu $n \geq 3$. În acest caz c.m.m.m.c. al polinoamelor $f_1, f_2, ..., f_n$ se calculează astfel: se determină un c.m.m.m.c. m_1 al polinoamelor f_1, f_2; apoi se determină un c.m.m.m.c. m_2 al polinoamelor m_1 și f_3, ..., în final, se determină un c.m.m.m.c. m_{n-1} al polinoamelor m_{n-2} și f_n. Polinomul $m = m_{n-1}$ este un c.m.m.m.c. al polinoamelor $f_1, f_2, ..., f_n$.

Exerciții

1. Să se arate că polinomul $X^4 - 3X^3 + 2X^2 - 6X + 6$ se divide la $X - 1$; se cere cîtul împărțirii.
2. Să se arate că polinomul $X^7 - 3X^6 + 2X^5 + 2X^4 - 2X^3 - 2X^2 + 3X - 1$ se divide la $X^2 - 2X + 1$; se cere cîtul împărțirii.
3. Să se determine parametrul m, astfel încît polinomul $X^3 - 3X^2 + 6X - m$ să se dividă la $X - 2$.
4. Să se determine a, b, c, astfel încît polinomul $X^5 - 2X^4 + 18X^3 + aX^2 + bX + c$ să se dividă la $X^3 - 3X^2 + 10X - 9$.
5. Să se determine relațiile între numerele m, p, q, astfel încît polinomul $X^3 + pX + q$ să fie divizibil cu polinomul $X^2 + mX + 1$.
6. Să se determine a și b astfel încît polinomul $aX^4 + bX^3 - 3$ să fie divizibil cu $(X - 1)^2$.

7. Dacă un polinom f nu divide nici pe g_1 și nici pe g_2, rezultă de aici că f nu divide produsul g_1g_2?
8. Fie f, g_1, g_2 trei polinoame astfel încît $f | g_1g_2$. Dacă f și g_1 sînt prime între ele să se arate că $f | g_2$.
9. Dacă f este prim cu g și cu h, să se arate că f este prim cu produsul gh.
10. Folosind algoritmul lui Euclid, să se determine c.m.m.d.c. al polinoamelor f și g dacă

   a) $f = X^6 - 7X^4 + 8X^3 - 7X + 7$, $g = 3X^6 - 7X^4 + 3X^3 - 7X$;
   b) $f = X^6 - X^5 - X^4 + 8X^3 - 5X^2 - 2X + 10$, $g = 3X^4 - 6X^3 + 5X^2 + 2X - 2$;
   c) $f = X^6 + 2X^4 - 4X^3 - 3X^2 + 8X - 5$, $g = X^6 + X^3 - X^2 + X$;
   d) $f = X^6 + 3X^5 - 12X^4 - 52X^3 - 52X^2 - 12X$, $g = X^4 + 3X^3 - 6X^2 - 22X - 12$;
   e) $f = X^5 + X^4 - X^3 - 3X^2 - 3X - 1$, $g = X^5 - 3X^4 + X^3 - X^2 + 3X - 1$;
   f) $f = X^5 - 10X^3 + X$, $g = X^4 - 4\sqrt{2}X^3 + 6X^2 + 4\sqrt{2}X + 1$;
   g) $f = X^4 - 4X^3 + 1$, $g = X^4 - 2X^3 - 3X^2 + X + 1$;
   h) $f = X^5 - 4X^4 + 3X^3 - 2X^2 + X - 1$, $g = X^4 - 2X^2 + 3X - 2$;
   i) $f = X^6 - 2X^5 + 3X^4 - 6X^3 - 5X^2 + X - 6$, $g = X^4 + 2X^3 + 3X^2 - 6X - 8$.
11. Dacă d este un c.m.m.d.c. al polinoamelor f și g și h este un polinom nenul, să se arate că dh este un c.m.m.d.c. al polinoamelor fh și gh.
12. Să se determine A și B astfel încît polinomul $AX^{n+2} + BX^n + 2$ să fie divizibil cu $(X - 1)^2$.
13. Să se arate că polinoamele f și g sînt prime între ele, unde:

   a) $f = 3X^3 - 2X^2 + X + 2$, $g = X^3 - 2X^2 + 2X - 1$;
   b) $f = X^4 - X^3 - 4X^2 + 4X + 1$, $g = X^3 - 2X^2 + 1$;
   c) $f = X^5 - 5X^4 - 2X^3 + 12X^2 - 2X + 12$, $g = X^3 - 5X^2 - 3X + 17$.

§ 7. Rădăcinile polinoamelor. Ecuații algebrice

7.1. Rădăcinile polinoamelor. Teorema lui Bézout

Fie f un polinom nenul cu coeficienții complecși. Un număr complex, $a \in \mathbb{C}$ se numește *rădăcină a polinomului* f dacă $f(a) = 0$.

Exemple. 1) Să considerăm polinomul de gradul întîi

$$f = aX + b \ (a \neq 0). \text{ Se vede că } f\left(-\frac{b}{a}\right) = a\left(-\frac{b}{a}\right) + b = 0$$

și deci $-\dfrac{b}{a}$ este rădăcină a polinomului $aX + b$.

2) Să considerăm polinomul $g = X^2 + 1$. Cum $g(\mathrm{i}) = \mathrm{i}^2 + 1 = -1 + 1 = 0$ și $g(-\mathrm{i}) = (-\mathrm{i})^2 + 1 = 0$, rezultă că i și $-$i sînt rădăcini ale polinomului $X^2 + 1$.

Teorema lui Bézout. Fie $f \neq 0$ un polinom nenul. Numărul $a \in \mathbb{C}$ este rădăcină a polinomului f dacă și numai dacă $X - a$ divide f.

Demonstrație. Dacă a este rădăcină a lui f adică $f(a) = 0$, atunci din teorema 5.2.1 rezultă că restul împărțirii lui f prin $X - a$ este zero și deci $X - a$ divide pe f.

Invers, dacă $X - a$ divide pe f, atunci există un polinom g astfel încît $f = (X - a)g$. Dar atunci $f(a) = (a - a)\,g(a) = 0 \cdot g(a) = 0$ și deci a este rădăcină a lui f.

Aplicație

Să se găsească condiția ca polinoamele

$$f = aX^2 + bX + c \text{ și } g = a'X^2 + b'X + c'$$

să aibă o rădăcină comună.

Fie α o rădăcină comună a celor două polinoame. Atunci α este rădăcină şi a polinomului

$$a'f - ag = a'(aX^2 + bX + c) - a(a'X^2 + b'X + c') = (a'b - ab')X + (a'c - ac').$$

Deci $(a'b - ab')\alpha + (a'c - ac') = 0$. Dacă $a'b - ab' \neq 0$ obţinem că

$$\alpha = \frac{ac' - a'c}{a'b - ab'}. \text{ Cum } f(\alpha) = 0, \text{ atunci}$$

$$a\left(\frac{ac' - a'c}{a'b - ab'}\right)^2 + b\frac{ac' - a'c}{a'b - ab'} + c = 0$$

şi făcînd calculele obţinem:

$$\boxed{(ac' - a'c)^2 - (ab' - a'b)(bc' - b'c) = 0}$$

Dacă $a'b - ab' = 0$ atunci $a'c - ac' = 0$ şi relaţia obţinută este verificată şi în acest caz.

7.2. Ecuaţii algebrice. Teorema lui D'Alembert-Gauss şi teorema lui Abel-Ruffini

Se numeşte *ecuaţie algebrică* cu o singură necunoscută o ecuaţie de forma

$$f(x) = 0 \qquad (1)$$

unde f este un polinom nenul.

Dacă f este polinomul $f = a_0 + a_1X ... + a_nX^n (a_n \neq 0)$ atunci ecuaţia algebrică (1) se scrie:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0. \qquad (1')$$

Gradul polinomului f se numeşte *gradul ecuaţiei algebrice* (1) sau (1') iar numerele complexe $a_0, a_1, ..., a_n$ se numesc *coeficienţii ecuaţiei algebrice* (1) sau (1').

Dacă coeficienţii ecuaţiei algebrice sînt numere reale (respectiv, raţionale), atunci se zice că ecuaţia algebrică (1) sau (1') este cu coeficienţii reali (respectiv, raţionali). O ecuaţie care nu poate fi redusă la o ecuaţie algebrică folosind operaţiile: adunare, înmulţire, ridicare la putere etc. se numeşte *transcendentă*.

Exemple. 1) Ecuaţia $x^3 - 3x + 7 = 0$ este o ecuaţie algebrică de gradul 3 cu coeficienţi raţionali.

2) Ecuaţia $\sqrt{3}x^4 + \sqrt[4]{2}x^2 + 7x - 1 = 0$ este o ecuaţie algebrică de gradul 4 cu coeficienţi reali.

3) Ecuaţiile $\sin x - 7x + 1 = 0$; $\log x = 3 - 2x$; $\sin x - \log x + 1 = 0$ sînt transcendente.

Să considerăm din nou ecuaţia algebrică

$$f(x) = 0. \qquad (1)$$

Numărul complex a se numeşte *soluţia* sau *rădăcina ecuaţiei* (1) dacă are loc egalitatea $f(a) = 0$. *Se vede că a este rădăcină a ecuaţiei (1) dacă şi numai dacă a este rădăcină a polinomului f.*

Determinarea rădăcinilor ecuaţiei algebrice (1) este una dintre cele mai importante probleme ale matematicii şi multă vreme a constituit obiectul principal al algebrei.

Încă din antichitate, matematicienii ştiau să determine rădăcinile ecuaţiilor algebrice de gradul I şi gradul II. În secolul al XVI-lea, în perioada Renaşterii italiene, matematicienii italieni: Scipione del Ferro şi Niccola Tartaglia au determinat formula de rezolvare pentru ecuaţia de gradul III, iar Ludovico Ferrari a determinat formula de rezolvare pentru ecuaţia de gradul IV. Acestea au fost publicate de Gerolamo Cardano în Ars Magna (1545).

Încercările ulterioare ale matematicienilor de a găsi formule de rezolvare pentru ecuaţiile algebrice de grad mai mare decît patru au fost zadarnice. Problema a fost rezolvată (în sens negativ) de matematicianul norvegian H. Abel şi matematicianul italian A. Ruffini la începutul secolului al XIX-lea. Mai exact, ei au demonstrat:

Teorema Abel-Ruffini. Ecuaţia algebrică generală* de grad mai mare decît patru nu poate fi rezolvată prin radicali (cu alte cuvinte, nu există nici o formulă (expresie) cu radicali, formată cu coeficienţii ecuaţiei, care să fie o rădăcină a ecuaţiei).

Vom vedea că există totuşi ecuaţii particulare de grad > 4 pentru care putem să dăm formule de determinare a rădăcinilor lor (a se vedea § 8).

Teorema următoare are o mare importanţă pentru algebră:

Teorema fundamentală a algebrei. Orice ecuaţie algebrică

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 = 0$$

de grad mai mare sau egal cu 1 şi cu coeficienţii complecşi are cel puţin o rădăcină complexă.

Această teoremă mai poartă numele de teorema lui D'Alembert-Gauss.

Nu vom da demonstraţiile teoremei fundamentale a algebrei şi a teoremei Abel-Ruffini deoarece depăşesc cadrul manualului.

Trebuie să observăm că teorema fundamentală a algebrei are caracter existenţial; nici o demonstraţie a acestei teoreme nu ne indică vreun procedeu de obţinere a rădăcinilor ecuaţiilor algebrice. Acest lucru ne arată că nu există nici o contradicţie între cele două teoreme enunţate mai înainte. În schimb teorema lui Abel-Ruffini ne spune că pentru ecuaţiile de grad > 4 nu se poate da un procedeu (formulă) de determinare a rădăcinilor sale (pentru ecuaţiile algebrice de grad ≤ 4, există formule de determinare a rădăcinilor lor).

Observaţie. Din clasele precedente am văzut că lărgirea noţiunii de număr a fost impusă printre altele de rezolvarea anumitor ecuaţii. De exemplu, introducerea numerelor întregi a fost impusă de faptul că nu orice ecuaţie cu coeficienţi numere naturale are o rădăcină număr natural. De *exemplu*, ecuaţia $x + 1 = 0$ nu are nici o rădăcină număr natural.

În continuare introducerea numerelor raţionale a fost impusă, de asemenea, de faptul că nu orice ecuaţie cu coeficienţi întregi are o rădăcină număr întreg. De *exemplu*, ecuaţia $2x + 1 = 0$ nu are nici o rădăcină număr întreg.

Introducerea numerelor reale a fost impusă printre altele de faptul că nu orice ecuaţie cu coeficienţii raţionali are o rădăcină raţională. Nu avem de considerat decît ecuaţia $x^2 - 2 = 0$ care nu are nici o rădăcină raţională.

Am văzut în manualul de clasa a IX-a că introducerea numerelor complexe, în algebră, a fost impusă de faptul că nu orice ecuaţie cu coeficienţii reali are o rădăcină reală. De *exemplu*, ecuaţia $x^2 + 1 = 0$ nu are nici o rădăcină reală.

Teorema lui d'Alembert-Gauss ne arată că procesul de lărgire pe această cale a noţiunii de număr se opreşte la numerele complexe.

7.3. Rădăcini multiple

Am văzut că teorema lui Bézout spune că dacă a este o rădăcină a polinomului $f \neq 0$ atunci $X - a$ divide pe f. Acest lucru ne permite să definim noţiunea de rădăcină multiplă a unui polinom.

---

* Prin ecuaţie algebrică generală de gradul n înţelegem o ecuaţie de forma (1') în care coeficienţii $a_0, a_1, ..., a_n$ sînt „variabile".

Definiția 7.3.1. Fie $f \neq 0$ un polinom nenul și $a \in \mathbb{C}$ o rădăcină a lui f. Numărul natural $m \geq 1$ cu proprietățile că $(X-a)^m$ divide pe f și $(X-a)^{m+1}$ nu divide pe f se numește *ordinul de multiplicitate al rădăcinii a*. Dacă $m = 1$, atunci a se numește *rădăcină simplă*, dacă $m \geq 2$, atunci a se numește *rădăcină multiplă* de ordinul m, dacă $m = 2, 3, \ldots$, atunci a se numește rădăcină *dublă*, *triplă*, ...

Exemple. 1) Polinomul $f = X^2 - 2X + 1$ are rădăcina $a = 1$ deoarece $f(1) = 0$. Cum $f = (X-1)^2$ atunci se vede că $a = 1$ este rădăcină dublă pentru polinomul f.

2) Polinomul $f = X^4 - 5X^3$ are rădăcina $a = 0$. Cum $X^3 \mid f$ și X^4 nu divide pe f, atunci $a = 0$ este o rădăcină triplă. De asemenea f are și rădăcina simplă $a = 5$.

Teorema 7.3.2. Fie $f \neq 0$ un polinom nenul. Dacă $a_1, a_2, \ldots, a_r$ sînt rădăcini ale lui f avînd ordinele de multiplicitate k_1, respectiv $k_2, \ldots$ respectiv k_r, atunci polinomul $(X-a_1)^{k_1}(X-a_2)^{k_2}\ldots(X-a_r)^{k_r}$ divide pe f.

Demonstrație. Vom face demonstrația prin inducție după r. Dacă $r = 1$, atunci faptul că $(X - a_1)^{k_1}$ divide pe f, rezultă din definiția 7.3.1. Presupunem afirmația adevărată pentru r și o vom demonstra pentru $r + 1$.

Din ipoteza de inducție rezultă că polinomul $(X - a_1)^{k_1}(X - a_2)^{k_2}\ldots(X - a_r)^{k_r}$ divide pe f, adică există polinomul g astfel încît $f = (X - a_1)^{k_1}(X - a_2)^{k_2}\ldots(X - a_r)^{k_r} g$. Deoarece a_{r+1} este rădăcină multiplă de ordinul k_{r+1}, atunci $(X - a_{r+1})^{k_{r+1}}$ divide pe f adică există un polinom h astfel încît $f = (X - a_{r+1})^{k_{r+1}} h$. Rezultă atunci că

$$(X - a_{r+1})^{k_{r+1}} h = (X - a_1)^{k_1}(X - a_2)^{k_2}\ldots(X - a_r)^{k_r} g. \qquad (1)$$

Numerele $a_1, a_2, \ldots, a_r, a_{r+1}$ sînt distincte între ele două cîte două, deoarece în caz contrar, dacă am avea $a_i = a_j (i \neq j)$, atunci a ar avea ordinul de multiplicitate mai mare sau egal cu $k_i + k_j$.

În egalitatea (1) facem $X = a_{r+1}$ și atunci

$$(a_{r+1} - a_1)^{k_1}(a_{r+1} - a_2)^{k_2}\ldots(a_{r+1} - a_r)^{k_r} g(a_{r+1}) = 0,$$

de unde rezultă că $g(a_{r+1}) = 0$. Din teorema lui Bézout obținem că $X - a_{r+1}$ divide pe g, adică există polinomul g_1 astfel încît $g = (X - a_{r+1}) g_1$. Înlocuind în egalitatea (1) obținem:

$$(X - a_{r+1})^{k_{r+1}} h = (X - a_1)^{k_1}\ldots(X - a_r)^{k_r}(X - a_{r+1}) g_1$$

de unde rezultă că

$$(X - a_{r+1})^{k_{r+1}-1} h = (X - a_1)^{k_1}(X - a_2)^{k_2}\ldots(X - a_r)^{k_r} g_1. \qquad (2)$$

Dacă $k_{r+1} - 1 > 0$, în egalitatea (2) facem din nou $X = a_{r+1}$. Exact ca mai sus obținem că $g_1(a_{r+1}) = 0$ și deci aplicînd din nou teorema lui Bézout obținem că: $g_1 = (X - a_{r+1}) g_2$. Dar atunci $g = (X - a_{r+1})^2 g_2$. Înlocuind în (1) obținem:

$$(X - a_{r+1})^{k_{r+1}} h = (X - a_1)^{k_1}\ldots(X - a_r)^{k_r}(X - a_{r+1})^2 g_2,$$

rezultă că:

$$(X - a_{r+1})^{k_{r+1}-2} h = (X - a_1)^{k_1}\ldots(X - a_r)^{k_r} g_2.$$

Dacă $k_{r+1} - 2 > 0$ continuăm procedeul ca mai sus. După $k_{r+1} - 2$ pași găsim un polinom $g_{k_{r+1}}$ astfel încît $g = (X - a_{r+1})^{k_{r+1}} g_{k_{r+1}}$.

Cum $f = (X - a_1)^{k_1}\ldots(X - a_r)^{k_r} g$ obținem:

$$f = (X - a_1)^{k_1}\ldots(X - a_r)^{k_r}(X - a_{r+1})^{k_{r+1}} g_{k_{r+1}} \text{ și deci}$$

$$(X - a_1)^{k_1}(X - a_2)^{k_2}\ldots(X - a_{r+1})^{k_{r+1}} \text{ divide pe } f.$$

Consecința 7.3.3. Orice polinom f de grad $n \geq 1$ are n rădăcini (nu neapărat distincte; o rădăcină se repetă de un număr de ori egal cu ordinul său de multiplicitate).

Demonstrație. Din teorema fundamentală a algebrei, polinomul f are cel puțin o rădăcină. Fie $a_1, a_2, \ldots, a_r$ toate rădăcinile lui f (luăm în considerare o rădăcină de atîtea ori cît este ordinul său). Din teorema 7.3.2, există un polinom $g \neq 0$ astfel încît $f = (X - a_1)(X - a_2)\ldots(X - a_r) g$. Dacă grad $g \geq 1$ atunci aplicînd din nou teorema fundamentală a algebrei obținem că g are o rădăcină a_{r+1} care este evident rădăcină și a lui f. Deci f ar avea $r + 1$ rădăcini, contradicție. Deci trebuie ca grad $g = 0$ și deci $g = a \in \mathbb{C}$. Atunci $f = a(X - a_1)(X - a_2)\ldots(X - a_r)$. Cum gradul polinomului $a(X - a_1)(X - a_2)\ldots(X - a_r)$ este r, atunci trebuie ca $r = n$ și deci f are n rădăcini.

Consecința 7.3.4. Fie $f = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_n X^n$ un polinom cu $a_n \neq 0$, $n \geq 1$. Dacă $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt rădăcinile lui f, atunci

$$f = a_n(X - x_1)(X - x_2)\ldots(X - x_n). \qquad (1)$$

În plus, descompunerea (1) a lui f în factori liniari este unică.

Demonstrație. Din demonstrația consecinței 7.3.3. f se scrie:

$$f = a(X - x_1)(X - x_2)\ldots(X - x_n) \text{ unde } a \in \mathbb{C},\ a \neq 0.$$

Cum coeficientul termenului de grad maxim al polinomului

$$a(X - x_1)(X - x_2)\ldots(X - x_n) \text{ este } aX^n \text{ atunci trebuie ca}$$

$$a = a_n \text{ și deci } f = a_n(X - x_1)(X - x_2)\ldots(X - x_n).$$

Să demonstrăm unicitatea descompunerii (1). Presupunem că f mai admite și descompunerea $f = b(X - y_1)(X - y_2)\ldots(X - y_m)$, unde $b, y_1, y_2, \ldots, y_m$ sînt numere complexe și $b \neq 0$.

Cum gradul polinomului $b(X - y_1)(X - y_2)\ldots(X - y_m)$ este m trebuie ca $m = n$. Termenul de grad maxim al polinomului $b(X - y_1)(X - y_2)\ldots(X - y_n)$ este bX^n și deci $b = a_n$. Deci $a_n(X - x_1)(X - x_2)\ldots(X - x_n) = a_n(X - y_1)(X - y_2)\ldots(X - y_n)$ sau (2) $(X - x_1)(X - x_2)\ldots(X - x_n) = (X - y_1)(X - y_2)\ldots(X - y_n)$.

Din egalitatea (2) prin înlocuirea lui X cu x_1, obținem:

$$(x_1 - y_1)(x_1 - y_2)\ldots(x_1 - y_n) = 0.$$

Deci trebuie ca unul din factorii $x_1 - y_1, x_1 - y_2, \ldots, x_1 - y_n$ să fie zero. Putem presupune că $x_1 - y_1 = 0$ și deci $x_1 = y_1$. Înlocuind în egalitatea (2) obținem:

$$(X - x_1)(X - x_2)\ldots(X - x_n) = (X - x_1)(X - y_2)\ldots(X - y_n).$$

Simplificînd cu $X - x_1$ obținem egalitatea

$$(X - x_2)\ldots(X - x_n) = (X - y_2)\ldots(X - y_n).$$

Înlocuim acum pe X cu x_2. Exact ca mai sus găsim că $x_2 = y_2$. Continuînd procedeul găsim că $x_3 = y_3, \ldots, x_n = y_n$.

Observație. Consecința 7.3.4 este foarte utilă în multe aplicații în care se cere aflarea c.m.m.d.c. a două polinoame f și g care pot fi descompuse în factori liniari.

În acest caz c.m.m.d.c. al celor două polinoame este produsul factorilor comuni la puterea cea mai mică.

De exemplu, fie polinoamele:

$$f = (X - 1)^4(X + 2)^2(X - 3)(X - 4) \text{ și } g = (X - 1)^3(X + 2)(X + 6).$$

Un c.m.m.d.c. al polinoamelor f și g este polinomul $d = (X - 1)^3(X + 2)$.

Consecința 7.3.5. Dacă un polinom f de gradul n se anulează pentru $n + 1$ valori distincte, atunci $f = 0$.

Demonstrație. Presupunem că $f \neq 0$. Dacă $n =$ grad $f = 0$ atunci $f = a \in \mathbb{C}$ și $a \neq 0$. În acest caz f nu se anulează pentru nici o valoare. Dacă $n =$ grad $f \geq 1$, atunci f are n rădăcini. Dar din ipoteză f are cel puțin $n + 1$ rădăcini, contradicție. Deci trebuie ca $f = 0$.

7.4. Relaţii între rădăcini şi coeficienţi (formulele lui Viète)

Teorema 7.4.1. Fie $f = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$ un polinom de grad n ($a_n \neq 0$). Dacă $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sînt rădăcinile lui f, atunci:

$$(1)\quad \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}, \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \dots + \alpha_1\alpha_n + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n = \dfrac{a_{n-2}}{a_n}, \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2\alpha_4 + \dots + \alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n = -\dfrac{a_{n-3}}{a_n}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_k + \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_{k-1}\alpha_{k+1} + \dots + \alpha_{n-k+1}\alpha_{n-k+2} \dots \\ \dots \alpha_n = (-1)^k \dfrac{a_k}{a_n}, \\ \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}. \end{cases}$$

Invers, dacă numerele complexe $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ satisfac relaţiile (1), atunci $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sînt rădăcinile polinomului f.

(Numărul de termeni din sumele (1) este egal cu $C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^k, \dots, C_n^n$).

Demonstraţie. Am văzut în consecinţa 7.3.4 că f poate fi scris sub forma

$$(2)\ f = a_n(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \dots (X - \alpha_n).$$

Dar

$$(3)\ f = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n.$$

Efectuînd calculele în (2) şi egalînd coeficienţii lui $X^k (0 \leqslant k \leqslant n)$ din (2) cu coeficienţii lui X^k din (3) obţinem formulele (1). De exemplu, coeficientul lui X^{n-1} din (2) este $-a_n(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)$. Deci trebuie ca $a_{n-1} = -a_n(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)$, de unde obţinem $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$. În continuare coeficientul lui X^{n-2} din (2) este $a_n(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \dots + \alpha_1\alpha_n + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n)$ care trebuie să fie egal cu coeficientul lui X^{n-2} din (3) care este a_{n-2}.
Deci $a_{n-2} = a_n(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n)$, de unde obţinem

$$\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n = \frac{a_{n-2}}{a_n}.$$

În acelaşi mod se obţin şi celelalte egalităţi din (1).
Invers, presupunem că $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ satisfac relaţiile (1). Considerăm polinomul $g = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \dots (X - \alpha_n)$. Făcînd înmulţirile obţinem

$$g = X^n - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) X^{n-1} + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \dots + \alpha_{n-1}\alpha_n) X^{n-2} + \dots + (-1)^n \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_n.$$

Ţinînd cont de relaţiile (1) deducem că:

$$g = X^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} X^{n-1} + \frac{a_{n-2}}{a_n} X^{n-2} + \dots + \frac{a_0}{a_n} =$$
$$= \frac{1}{a_n}(a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0) = \frac{1}{a_n} f.$$

Din egalitatea $g = \dfrac{1}{a_n} f$ rezultă că $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sînt rădăcini şi pentru f.

Relaţiile (1) se numesc *relaţiile între rădăcinile şi coeficienţii polinomului f* sau *relaţiile lui Viète*.
Dacă considerăm ecuaţia asociată

$$a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 = 0 \qquad (4)$$

atunci relaţiile (1) se numesc şi *relaţiile între rădăcinile şi coeficienţii ecuaţiei* (4).
Să scriem relaţiile lui Viète pentru cazul cînd polinomul f are gradul 2 sau 3. Să presupunem că f este de gradul 2 adică f este de forma $f = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$.
În acest caz relaţiile (1) se scriu astfel:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = \dfrac{-a_1}{a_2}, \\ \alpha_1\alpha_2 = \dfrac{a_0}{a_2}. \end{cases} \qquad (5)$$

Dacă f este de gradul 3, adică $f = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + a_3 X^3$, atunci relaţiile 1) se scriu astfel:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \dfrac{-a_2}{a_3}, \\ \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = \dfrac{+a_1}{a_3}, \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = \dfrac{-a_0}{a_2}. \end{cases}$$

Relaţiile lui Viète sînt foarte utile în numeroase aplicaţii cînd se cere să se determine rădăcinile unui polinom (sau ecuaţii) şi cînd se cunoaşte o relaţie suplimentară între rădăcini.

Exemple

1) Fie polinomul $f = X^3 - 10X^2 + 29X - 20$.
Să se determine rădăcinile x_1, x_2, x_3 ale lui f ştiind că $x_1 + x_2 = x_3$.
Scriem relaţiile lui Viète

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 10, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 29, \\ x_1x_2x_3 = 20. \end{cases} \qquad (6)$$

Cum $x_1 + x_2 = x_3$ atunci din prima relaţie din (6) avem că

$$2x_3 = 10 \text{ şi deci } \boxed{x_3 = 5}$$

Din $x_1x_2x_3 = 20$, obţinem $x_1x_2 = 4$. Formăm sistemul

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5, \\ x_1x_2 = 4, \end{cases}$$

care dă rădăcinile: $\boxed{x_1 = 1}$ şi $\boxed{x_2 = 4}$

2) Să se găsească relaţia între a, b, c ştiind că rădăcinile polinomului $f = X^3 + aX^2 + bX + c$ sînt în progresie geometrică.
Dacă x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile lui f atunci avem relaţiile:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a, \\ x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = b, \\ x_1x_2x_3 = -c. \end{cases} \qquad (7)$$

Cum x_1, x_2, x_3 sînt în progresie geometrică atunci $x_2^2 = x_1x_3$.

Din relația a 3-a din (7) obținem:

$$x_2^3 = -c.$$

Cum $f(x_2) = 0$, atunci $x_2^3 + ax_2^2 + bx_2 + c = 0$ de unde rezultă că $ax_2^2 + bx_2 = 0$. Deci $x_2 = 0$ sau $x_2 = -\frac{b}{a}$. Dacă $x_2 = -\frac{b}{a}$ din $x_2^3 = -c$ obținem

$$\boxed{a^3c - b^3 = 0} \qquad (8)$$

Dacă $x_2 = 0$, atunci $x_1x_3 = 0$ și din relația a doua din (7) obținem $b = 0$. Cum $x_2^3 = -c$, atunci $c = 0$. Dar se observă că relația (8) este îndeplinită pentru $b = c = 0$.

3) Fie polinomul $f = X^3 + aX^2 + bX + c$ avînd rădăcinile x_1, x_2, x_3. Notăm $S_n = x_1^n + x_2^n + x_3^n$ $(n \geqslant 1)$. Să se determine în funcție de a, b, c, expresia S_n pentru $n = 1, 2, 3, 4$.

Pentru $n = 1$ avem $S_1 = x_1 + x_2 + x_3 = -a$.

Pentru $n = 2$, avem $S_2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = a^2 - 2b$.

Presupunem că $n \geqslant 3$. Cum x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile lui f avem egalitățile:

$$x_1^3 + ax_1^2 + bx_1 + c = 0,$$
$$x_2^3 + ax_2^2 + bx_2 + c = 0,$$
$$x_3^3 + ax_3^2 + bx_3 + c = 0.$$

Înmulțim prima egalitate cu x_1^{n-3}, a doua cu x_2^{n-3} și a treia cu x_3^{n-3}:

$$x_1^n + ax_1^{n-1} + bx_1^{n-2} + cx_1^{n-3} = 0,$$
$$x_2^n + ax_2^{n-1} + bx_2^{n-2} + cx_2^{n-3} = 0,$$
$$x_3^n + ax_3^{n-1} + bx_3^{n-2} + cx_3^{n-3} = 0,$$

care adunate dau:

$$\boxed{S_n + aS_{n-1} + bS_{n-2} + cS_{n-3} = 0} \qquad (9)$$

Dacă în această egalitate $n = 3$, obținem:

$$S_3 + aS_2 + bS_1 + cS_0 = 0.$$

Cum $S_0 = x_1^0 + x_2^0 + x_3^0 = 3$ obținem

$$S_3 = -aS_2 - bS_1 - 3c = -a(a^2 - 2b) + ab - 3c = -a^3 + 3ab - 3c.$$

În egalitatea (9) facem $n = 4$. Obținem

$S_4 + aS_3 + bS_2 + cS_1 = 0$, de unde rezultă că $S_4 = -aS_3 - bS_2 - cS_1 = -a(-a^3 + 3ab - 3c) - b(a^2 - 2b) + ac = a^4 - 4a^2b + 2b^2 + 4ac$.

Relațiile lui Viète sînt folosite în numeroase probleme în care se cere să se determine ecuația, cunoscîndu-se relațiile între rădăcinile $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ adică cunoscîndu-se numerele $s_1, s_2, \ldots, s_n$ date de relațiile:

$$\begin{cases} s_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n, \\ s_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \ldots + \alpha_{n-1}\alpha_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_n = \alpha_1\alpha_2 \ldots \alpha_n. \end{cases} \qquad (10)$$

În acest caz ecuația care are ca rădăcini pe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ este următoarea:

$$\boxed{x^n - s_1x^{n-1} + s_2x^{n-2} + \ldots + (-1)^n s_n = 0} \qquad (11)$$

Într-adevăr, este clar că polinomul $g = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \ldots (X - \alpha_n)$ are ca rădăcini pe $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Efectuînd calculele și ținînd cont de relațiile (10) obținem

$$g = X^n - s_1X^{n-1} + s_2X^{n-2} + \ldots + (-1)^n s_n,$$

ceea ce arată că ecuația (11) are rădăcinile $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$.

Exemple. 1) Fie ecuația $x^3 - 5x + 1 = 0$. Să se determine ecuația care are ca rădăcini dublul rădăcinilor ecuației date.

Să notăm cu x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuației $x^3 - 5x + 1 = 0$ și cu y_1, y_2, y_3 rădăcinile ecuației pe care vrem să o determinăm.

Avem $y_1 = 2x_1$, $y_2 = 2x_2$, $y_3 = 2x_3$. Atunci $y_1 + y_2 + y_3 = 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 2(x_1 + x_2 + x_3) = 0$, $y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = (2x_1)(2x_2) + (2x_1)(2x_3) + (2x_2)(2x_3) = 4(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) = 4(-5) = -20$, $y_1y_2y_3 = 8$, $x_1x_2x_3 = -8$.

Aplicînd formula (11) ecuația care are ca rădăcini pe y_1, y_2, y_3 este

$$x^3 - 20x + 8 = 0.$$

2) Fie ecuația $x^3 - x^2 + 7x + 1 = 0$. Să se determine ecuația care are ca rădăcini inversele rădăcinilor ecuației date.

Să notăm cu x_1, x_2, x_3 rădăcinile ecuației $x^3 - x^2 + 7x + 1$ și cu y_1, y_2, y_3 rădăcinile ecuației pe care vrem să o determinăm.

Avem

$$y_1 = \frac{1}{x_1}, \quad y_2 = \frac{1}{x_2}, \quad y_3 = \frac{1}{x_3}.$$

Atunci

$$y_1 + y_2 + y_3 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3}{x_1x_2x_3} = -7,$$

$$y_1y_2 + y_1y_3 + y_2y_3 = \frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_1x_3} + \frac{1}{x_2x_3} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{x_1x_2x_3} = -1, \quad y_1y_2y_3 = \frac{1}{x_1x_2x_3} = -1.$$

Ecuația de gradul 3 care are ca rădăcini pe y_1, y_2, y_3 este următoarea:

$$x^3 + 7x^2 - x + 1 = 0.$$

Observații. 1) Presupunem că avem $f(x) = 0$, o ecuație algebrică de gradul n și vrem să deducem o altă ecuație algebrică de gradul n, $g(y) = 0$, ale cărei rădăcini y sînt legate de rădăcinile x ale ecuației $f(x) = 0$ printr-o relație dată $y = \varphi(x)$.

În cazul acesta se poate proceda astfel.

Din relațiile $\begin{cases} f(x) = 0, \\ y = \varphi(x) \end{cases}$

se elimină x și ecuația care se obține în y este ecuația căutată. Ca exemplificare să considerăm din nou exemplul 2). Ecuația este $x^3 - x^2 + 7x + 1 = 0$, iar relația dată este

$$y = \frac{1}{x}.$$

Din relațiile: $\begin{cases} x^3 - x^2 + 7x + 1 = 0, \\ y = \dfrac{1}{x}, \end{cases}$

eliminăm pe x. Avem $x = \frac{1}{y}$, care înlocuit în prima relație dă:

$$\frac{1}{y^3} - \frac{1}{y^2} + \frac{7}{y} + 1 = 0,$$

de unde obținem ecuația $y^3 + 7y^2 - y + 1 = 0$.

2) Procedeul expus mai sus este recomandabil ori de cîte ori este posibilă eliminarea lui x din relațiile:

$$\begin{cases} f(x) = 0, \\ y = \varphi(x). \end{cases}$$

În caz că această eliminare este dificilă se vor utiliza relațiile lui Viète.

1. Aplicînd teorema lui Bézout să se determine parametrii a și b astfel încît polinomul $X^4 - 4X^3 + 4X^2 + aX + b$ să se dividă cu $X^2 - 4X + 3$. Să se determine apoi cîtul împărțirii.
2. Să se determine rădăcinile polinomului $X^3 - 3X^2 + 2X + 6$ știind că are rădăcina $\alpha = -1$.
3. Să se determine parametrul m și apoi să se afle rădăcinile polinomului $X^3 - 6X^2 + 8X + m$ știind că are rădăcina $\alpha = 2$.
4. Să se determine parametrii a și b știind că polinomul $X^4 - 5X^3 + 8X^2 + aX + b$ are rădăcina dublă $\alpha = 1$.
5. Să se determine ecuația de gradul cel mai mic care are ca rădăcini numerele 1, 2, −2.
6. Să se determine ecuația de gradul cel mai mic care are rădăcina triplă 1 și rădăcinile simple 2 și −3.
7. Să se găsească c.m.m.d.c. al polinoamelor f și g:
   a) $f = (X-1)^5(X+1)^3(X-3)^2(X-4)$, $g = (X-1)^3(X+1)^2(X-4)^5$;
   b) $f = (X^2-1)^2(X^3-1)(X-2)$, $g = (X-1)^4(X-2)^5$;
   c) $f = (X^4-1)(X^2-1)(X+3)^2$, $g = (X^2+1)^2(X+3)^4(X-1)$.
8. Să se arate că două polinoame nenule f și g din $\mathbb{C}[X]$ sînt prime între ele dacă și numai dacă nu au nici o rădăcină comună.
9. Dacă $f, g \in \mathbb{C}[X]$ au același grad, atunci f și g au aceleași rădăcini dacă și numai dacă polinoamele f și g au coeficienții proporționali.
10. Aplicînd teorema lui d'Alembert-Gauss să se arate că dacă $f \in \mathbb{C}[X]$ este un polinom de grad $\geqslant 2$, atunci funcția polinomului asociată

$$\tilde{f}: \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ \tilde{f}(\alpha) = f(\alpha)$$

nu este injectivă, dar este surjectivă.
11. Fie f și g două polinoame din $\mathbb{C}[X]$. Să se arate că funcțiile polinomiale $\tilde{f}: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ și $\tilde{g}: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sînt egale dacă și numai dacă polinoamele f și g sînt egale.
12. Dacă $f(X)$ este un polinom arbitrar să se arate că $f(f(X)) - f(X)$ este divizibil prin $f(X) - X$.
13. Folosind teorema lui Bézout și teorema 7.3.2. să se arate că:
   a) Polinomul $(X+1)^{6n+1} + X^{6n+2}$ se divide la $X^2 + X + 1$;
   b) Polinomul $(X-1)^{n+2} - X^{2(n-1)}$ se divide la $X^2 - X + 1$;
   c) Polinomul $(X+1)^{3n+2} + X + 2$ se divide la $X^2 + 3X + 3$;
   d) Polinomul $(X^2+1)^{6n+2} + X^4 + 1$ se divide la $X^2 + X + 1$;
   e) Polinomul $X^{6n+5} + X^{3n+4} + 1$ se divide la $X^2 + X + 1$;
   f) Polinomul $(X+1)^{12n+1} + X^{3n+2}$ se divide la $X^2 + X + 1$.
14. Fie ecuația $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ avînd rădăcinile x_1, x_2, x_3. Să se determine ecuația care are rădăcinile y_1, y_2, y_3 dacă
   a) $y_1 = 3x_1 + x_2 + x_3$, $y_2 = 3x_2 + x_1 + x_3$, $y_3 = 3x_3 + x_1 + x_2$;
   b) $y_1 = \frac{1}{2}x_1$, $y_2 = \frac{1}{2}x_2$, $y_3 = \frac{1}{2}x_3$;
   c) $y_1 = -x_1 + x_2 + x_3$, $y_2 = -x_2 + x_1 + x_3$, $y_3 = -x_3 + x_1 + x_2$;
   d) $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_2^2$, $y_3 = x_3^2$;
   e) $y_1 = x_1 + x_2x_3$, $y_2 = x_2 + x_1x_3$, $y_3 = x_3 + x_1x_2$.
15. Să se determine parametrul m astfel ca o rădăcină a ecuației $x^3 - 28x + m = 0$ să fie dublul altei rădăcini.
16. Să se determine λ astfel încît suma a două rădăcini ale ecuației $2x^3 - 4x^2 - 7x + \lambda = 0$ să fie egală cu 1.
17. Să se determine relația între p și q astfel încît rădăcinile x_1, x_2, x_3 ale ecuației $x^3 + px + q = 0$ să se găsească în relația $x_3 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$. Dacă $q = p$ și $p \in \mathbb{R} - \{0\}$, să se arate că condiția din enunț nu poate fi îndeplinită.

18. Să se rezolve ecuațiile algebrice
   a) $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 2x - 6 = 0$,
   b) $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 10x + 25 = 0$,
   c) $x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 3 = 0$,
   știind că suma a două rădăcini este egală cu suma celorlalte două rădăcini.
19. Să se rezolve ecuațiile algebrice
   $4x^3 - 12x^2 + 11x - 3 = 0$, $x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$,
   știind că rădăcinile sale sînt în progresie aritmetică.
20. Dacă x_1, x_2, x_3 sînt rădăcinile polinomului

$$X^3 + a_1X^2 + a_2X + a_3,$$

să se calculeze $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ și $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$.
21. Fie ecuația $x^3 + 3x + 1 = 0$. Să se determine ecuația de gradul al treilea care are rădăcinile y_1, y_2, y_3 dacă:
   a) $y_1 = \frac{x_2 + x_3}{x_1}$, $y_2 = \frac{x_3 + x_1}{x_2}$, $y_3 = \frac{x_1 + x_2}{x_3}$;
   b) $y_1 = \frac{x_1x_3}{x_1} + 1$, $y_2 = \frac{x_1x_3}{x_2} + 1$, $y_3 = \frac{x_1x_2}{x_3} + 1$;
   c) $y_1 = 1 + \frac{1}{x_1^2}$, $y_2 = 1 + \frac{1}{x_2^2}$, $y_3 = 1 + \frac{1}{x_3^2}$.
22. Să se arate că 1 este o rădăcină dublă pentru polinomul

$$X^{3n} - nX^{n+2} + nX^{n-1} - 1.$$

23. Să se determine ordinul de multiplicitate al rădăcinii 2 pentru polinomul

$$X^6 - 6X^5 + 12X^4 - 9X^3 + 6X^2 + 12X + 8.$$

24. Să se determine ordinul de multiplicitate al rădăcinii −1 pentru polinomul $X^5 + 6X^4 + 14X^3 + 16X^2 + 9X + 2$ și apoi să se afle rădăcinile polinomului dat.
25. Să se determine ordinul de multiplicitate al rădăcinilor 1 și −1 pentru polinomul

$$X^5 + X^4 - 2X^3 - 2X^2 + X + 1.$$

§ 8. Rezolvarea cîtorva ecuații algebrice de grad superior

Sînt bine cunoscute formulele de determinare a rădăcinilor pentru ecuațiile de gradul I și gradul II. De asemenea se cunosc formule de rezolvare pentru ecuația de gradul III (numite *formulele lui Cardano*) precum și pentru ecuația de gradul IV. Inconvenientul acestor formule (pentru ecuațiile de gradele III și IV) constă în aceea că sînt foarte complicate și nu au nici o utilizare practică. Am văzut prin teorema lui Abel-Ruffini că pentru ecuația generală de grad $\geqslant 5$ nu se pot da formule de determinare a rădăcinilor prin radicali.

Ceea ce ne propunem în acest paragraf este de a arăta că există ecuații de grad $\geqslant 3$ pentru care se pot da formule de determinare a rădăcinilor lor.

Ecuații binome. Forma ecuațiilor binome este

$$x^n - a = 0 \quad (a \in \mathbb{C},\ n \geqslant 1). \tag{1}$$

Rezolvarea acestor ecuații este făcută în manualul de Geometrie. Se procedează astfel: se scrie numărul a sub formă trigonometrică, $a = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Atunci soluțiile ecuației (1) sînt date de formula

$$x = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),$$

unde $0 \leqslant k \leqslant n - 1$.
Trebuie să observăm că rezolvarea ecuațiilor de gradele I și II se reduce la rezolvarea unor ecuații binome.

Ideea de rezolvare a ecuațiilor de grad ≥ 3 este de a o reduce la rezolvarea succesivă a unui număr de ecuații simple (de regulă ecuații binome).

Ecuații bipătrate. Forma generală a ecuațiilor bipătrate este:

(2) $$ax^4 + bx^2 + c = 0,$$

unde $$a, b, c \in \mathbb{C} \text{ și } a \neq 0.$$

Rezolvarea ecuației (2) se face astfel.

Se face substituția $x^2 = y$ și obținem ecuația de gradul doi

(3) $$ay^2 + by + c = 0.$$

Ecuația (3) se numește *rezolvanta* ecuației (2) și rădăcinile ei sînt:

$$y_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ și } y_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Din egalitatea $x^2 = y$ obținem ecuațiile

$$x^2 = y_1 \text{ și } x^2 = y_2.$$

Ecuația $x^2 = y_1$ are rădăcinile:

$$x_1 = \sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}, \quad x_2 = -\sqrt{\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Ecuația $x^2 = y_2$ are rădăcinile

$$x_3 = \sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}, \quad x_4 = -\sqrt{\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}.$$

Numerele x_1, x_2, x_3, x_4 sînt rădăcinile ecuației (2).

Rădăcinile ecuației (2) pot fi cuprinse în formula

(4) $$\boxed{x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}}$$

numită *formula de rezolvare* a ecuației bipătrate.

Observație. În formula de rezolvare a ecuației bipătrate apar radicali de forma $\sqrt{A + \sqrt{B}}$. Acești radicali pot fi aduși la o sumă sau diferență de radicali mai simpli utilizînd formula

(5) $$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$$

($A^2 \geq B$, $B \geq 0$) (această formulă se verifică direct prin ridicare la pătrat).

Exemple. 1) Să rezolvăm ecuația bipătrată

$$x^4 + 5x^2 - 6 = 0.$$

Facem substituția $x^2 = y$ și obținem ecuația rezolventă

$$y^2 + 5y - 6 = 0$$

care are rădăcinile $y_1 = -6$ și $y_2 = 1$.

Rădăcinile ecuației bipătrate sînt:

$$x_1 = i\sqrt{6}, \ x_2 = -i\sqrt{6}, \ x_3 = 1, \ x_4 = -1.$$

2) Să rezolvăm ecuația bipătrată

$$x^4 - 8x^2 + 9 = 0.$$

Făcînd substituția $x^2 = y$ obținem ecuația rezolventă

$$y^2 - 8y + 9 = 0,$$

care are rădăcinile $y_1 = 4 + \sqrt{7}$ și $y_2 = 4 - \sqrt{7}$.

Rădăcinile ecuației bipătrate sînt:

$$x_1 = \sqrt{4 + \sqrt{7}}; \ x_2 = -\sqrt{4 + \sqrt{7}}; \ x_3 = \sqrt{4 - \sqrt{7}}; \ x_4 = -\sqrt{4 - \sqrt{7}}.$$

Dar, folosind formulele (5) de transformare a radicalilor dubli obținem:

$$\sqrt{4 + \sqrt{7}} = \sqrt{\frac{4 + \sqrt{16 - 7}}{2}} + \sqrt{\frac{4 - \sqrt{16 - 7}}{2}} = \sqrt{\frac{7}{2}} + \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{7} + 1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{și } \sqrt{4 - \sqrt{7}} = \sqrt{\frac{4 + \sqrt{16 - 7}}{2}} - \sqrt{\frac{4 - \sqrt{16 - 7}}{2}} = \frac{\sqrt{7} - 1}{\sqrt{2}}.$$

Deci $x_1 = \dfrac{\sqrt{7} + 1}{\sqrt{2}}$, $x_2 = -\dfrac{\sqrt{7} + 1}{\sqrt{2}}$, $x_3 = \dfrac{\sqrt{7} - 1}{\sqrt{2}}$, $x_4 = -\dfrac{\sqrt{7} - 1}{\sqrt{2}}$.

Ecuații reciproce. O ecuație de forma

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0, \ (a_n \neq 0),$$

avînd proprietatea $a_{n-i} = a_i$ oricare ar fi i $(0 \leq i \leq n)$, se numește *ecuație reciprocă de gradul n* (altfel spus, o ecuație este reciprocă dacă coeficienții termenilor egal depărtați de extremi sînt egali).

Observație. Pe noi ne interesează numai rezolvarea ecuațiilor reciproce de grad ≥ 3.

Dacă $n = 3$ obținem forma generală a ecuației reciproce de gradul 3:

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0 \ (a \neq 0).$$

Dacă $n = 4$, obținem forma generală a ecuației reciproce de gradul 4:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \ (a \neq 0).$$

Dacă $n = 5$, obținem forma generală a ecuației de gradul 5:

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0 \ (a \neq 0).$$

Să dăm cîteva proprietăți generale pentru ecuațiile reciproce de gradul n:

1° *Dacă ecuația reciprocă are rădăcina α, atunci ea are și rădăcina $\frac{1}{\alpha}$.*

Într-adevăr, dacă $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$ este o ecuație reciprocă avînd rădăcina α, atunci $a_n\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \ldots + a_2\alpha^2 + a_1\alpha + a_0 = 0$. Cum $\alpha \neq 0$ (în caz contrar, ar rezulta $a_0 = 0$ și deci $a_n = 0$) putem să împărțim cu α^n și obținem relația

$$a_n + a_{n-1}\frac{1}{\alpha} + \ldots + a_2\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-2} + a_1\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-1} + a_0\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n = 0.$$

Ținînd cont de faptul că $a_i = a_{n-i}$ oricare ar fi i $(0 \leq i \leq n)$ obținem

$$a_n\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{n-1} + \ldots + a_1\frac{1}{\alpha} + a_0 = 0$$

și deci și $\frac{1}{\alpha}$ este de asemenea rădăcină.

2° *Orice ecuație reciprocă de grad impar are rădăcina $x = -1$.*

Într-adevăr fie

$$f(x) = a_{2p+1}x^{2p+1} + a_{2p}x^{2p} + \ldots + a_{p+1}x^{p+1} + a_px^p + \ldots + a_1x + a_0 = 0,$$

o ecuație reciprocă de grad impar $n = 2p + 1$.

Înlocuind $x = -1$, obținem în membrul stîng numărul

$$f(-1) = a_{2p+1}(-1)^{2p+1} + a_{2p}(-1)^{2p} + \ldots + a_{p+1}(-1)^{p+1} + a_p(-1)^p + \ldots$$
$$\ldots + a_1(-1) + a_0 = -a_{2p+1} + a_{2p} + \ldots + a_{p+1}(-1)^{p+1} + a_p(-1)^p + \ldots$$
$$\ldots + (-a_1) + a_0.$$

Cum $a_0 = a_{2p+1}$, $a_1 = a_{2p}$, $a_2 = a_{2p-1}$, ..., $a_p = a_{p+1}$, atunci grupînd termenii egal depărtaţi de extremi obţinem

$$f(-1) = (a_0 - a_{2p+1}) + (a_{2p} - a_1) + (a_2 - a_{2p-1}) + \dots + (-1)^p(a_p - a_{p+1}) = 0.$$

Rezultă că $x = -1$ este rădăcină pentru ecuaţia reciprocă de grad impar.

3° *Orice ecuaţie reciprocă de grad impar*

$$f(x) = a_{2p+1}x^{2p+1} + a_{2p}x^{2p} + \dots + a_1x + a_0 = 0,$$

se reduce la rezolvarea ecuaţiei $x + 1 = 0$ şi a *unei ecuaţii reciproce de grad par,*

$$g(x) = b_{2p}x^{2p} + b_{2p-1}x^{2p-1} + \dots + b_1x + b_0 = 0.$$

Într-adevăr, din 2° ecuaţia $f(x) = 0$ are rădăcina $x = -1$. Conform teoremei lui Bézout putem scrie

$$f(x) = (x + 1)g(x).$$

Presupunem că $g(x) = b_{2p}x^{2p} + b_{2p-1}x^{2p-1} + \dots + b_1x + b_0$. Deci

$$a_{2p+1}x^{2p+1} + a_{2p}x^{2p} + \dots + a_1x + a_0 =$$
$$= (x + 1)\cdot(b_{2p}x^{2p} + b_{2p-1}x^{2p-1} + \dots + b_1x + b_0),$$

de unde obţinem

$$a_{2p+1} = b_{2p},\ a_0 = b_0,$$
$$a_{2p} = b_{2p} + b_{2p-1},\ a_1 = b_1 + b_0,$$
$$a_{2p-1} = b_{2p-1} + b_{2p-2},\ a_2 = b_2 + b_1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Cum $a_i = a_{2p+1-i}$, oricare ar fi $i(0 \leqslant i \leqslant 2p + 1)$ obţinem din primele egalităţi $b_0 = b_{2p}$. Cum $b_{2p} + b_{2p-1} = b_1 + b_0$ obţinem $b_1 = b_{2p-1}$. Din următoarele egalităţi obţinem că $b_2 = b_{2p-2}$.

Procedînd la fel, din egalităţile următoare deducem în final că $b_i = b_{2p-i}$ oricare ar fi $0 \leqslant i \leqslant 2p$.

Deci ecuaţia $b_{2p}x^{2p} + b_{2p-1}x^{2p-1} + \dots + b_1x + b_0 = 0$ este reciprocă.

Rezolvarea ecuaţiei reciproce de gradul III

Am văzut că forma generală a ecuaţiei reciproce de gradul III este:

(1) $$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0 \ (a \neq 0).$$

Această ecuaţie are rădăcina $x = -1$. Atunci putem să scriem

$$(x + 1)[ax^2 + (b - a)x + a] = 0.$$

Ecuaţia (1) admite rădăcinile

$$x_1 = -1 \text{ şi } x_2,\ x_3 \text{ date de ecuaţia } ax^2 + (b - a)x + a = 0.$$

Exemplu. Să rezolvăm ecuaţia $2x^3 + x^2 + x + 2 = 0$. Această ecuaţie este o ecuaţie reciprocă de gradul III. Ea se scrie

$$(x + 1)(2x^2 - x + 2) = 0$$

care are rădăcinile $x_1 = -1$ şi x_2, x_3 care sînt rădăcinile ecuaţiei $2x^2 - x + 2 = 0$, adică

$$x_2 = \frac{1 + i\sqrt{15}}{4},\quad x_3 = \frac{1 - i\sqrt{15}}{4}.$$

Rezolvarea ecuaţiei reciproce de gradul IV

Am văzut că forma generală a ecuaţiei reciproce de gradul IV este:

(1) $$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0,\ (a \neq 0).$$

Cum $a \neq 0$, ecuaţia (1) nu admite ca rădăcină pe $x = 0$. În (1) împărţim cu x^2 şi obţinem ecuaţia

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x^2} = 0$$

sau grupînd termenii în mod convenabil avem:

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

Facem substituţia $y = x + \frac{1}{x}$. Cum $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$ obţinem ecuaţia în y

$$a(y^2 - 2) + by + c = 0 \text{ sau (2) } ay^2 + by + c - 2a = 0$$

Ecuaţia (2) se numeşte *rezolvanta ecuaţiei* (1).

Dacă y_1, y_2 sînt rădăcinile ecuaţiei (2) atunci obţinem două ecuaţii:

$$x + \frac{1}{x} = y_1 \text{ şi } x + \frac{1}{x} = y_2$$

sau (3) $x^2 - y_1x + 1 = 0$

şi (4) $x^2 - y_2x + 1 \neq 0$.

Dacă x_1, x_2 sînt rădăcinile ecuaţiei (3) şi x_3, x_4 sînt rădăcinile ecuaţiei (4) atunci x_1, x_2, x_3, x_4 sînt rădăcinile ecuaţiei (1).

Exemplu. Să se rezolve ecuaţia

$$6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0.$$

Această ecuaţie este o ecuaţie reciprocă de gradul IV. Împărţim cu x^2 şi obţinem:

$$6x^2 + 5x - 38 + \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} = 0$$

sau

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0.$$

Notăm $y = x + \frac{1}{x}$. Cum $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$ obţinem ecuaţia

$$6(y^2 - 2) + 5y - 38 = 0$$

sau

$$6y^2 + 5y - 50 = 0,$$

care are rădăcinile $y_1 = -\frac{10}{3}$ şi $y_2 = \frac{5}{2}$.

Avem ecuaţiile:

$$x + \frac{1}{x} = -\frac{10}{3} \text{ şi } x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}.$$

Prima ecuaţie are rădăcinile

$$x_1 = -3,\ x_2 = -\frac{1}{3}.$$

Ecuația a doua are rădăcinile $x_3 = 2$, $x_4 = \frac{1}{2}$.

Deci $x_1 = -3$, $x_2 = -\frac{1}{3}$, $x_3 = 2$, $x_4 = \frac{1}{2}$ sînt rădăcinile ecuației date.

Rezolvarea ecuației reciproce de gradul V

Forma generală a ecuației de gradul V este

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0.$$

Deoarece această ecuație este de grad impar, din proprietatea 3° rezolvarea acestei ecuații se reduce la rezolvarea ecuației $x + 1 = 0$ și a unei ecuații reciproce de gradul IV.

Exemplu. Să se rezolve ecuația

$$6x^5 + x^4 - 43x^3 - 43x^2 + x + 6 = 0.$$

Această ecuație este o ecuație reciprocă de gradul V.

Deoarece este de grad impar această ecuație admite soluția $x = -1$.

Putem scrie:

$$6x^5 + x^4 - 43x^3 - 43x^2 + x + 6 = (x + 1)(6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6).$$

Deci obținem ecuația reciprocă de gradul IV:

$$6x^4 - 5x^3 - 38x^2 - 5x + 6 = 0.$$

Împărțind cu x^2 obținem:

$$6x^2 - 5x - 38 - \frac{5}{x} + \frac{6}{x^2} = 0.$$

Facem substituția $y = x + \frac{1}{x}$. Obținem ecuația de gradul II

$6y^2 - 5y - 50 = 0$ care are soluțiile $y_1 = -\frac{5}{2}$, $y_2 = \frac{10}{3}$.

Din ecuația $x + \frac{1}{x} = -\frac{5}{2}$ obținem $x_2 = -2$, $x_3 = -\frac{1}{2}$.

Din ecuația $x + \frac{1}{x} = \frac{10}{3}$ obținem $x_4 = 3$, $x_5 = \frac{1}{3}$.

Deci ecuația dată are rădăcinile

$$x_1 = -1,\ x_2 = -2,\ x_3 = -\frac{1}{2},\ x_4 = 3,\ x_5 = \frac{1}{3}.$$

Observații. 1) Am văzut că ecuația reciprocă de gradul IV se reduce la rezolvarea unor ecuații de gradul II, făcînd substituția $x + \frac{1}{x} = y$. Se poate arăta (exercițiul 10), folosind binomul lui Newton, că orice ecuație reciprocă de gradul $n = 2p$ se reduce, folosind aceeași substituție $x + \frac{1}{x} = y$, la rezolvarea unei ecuații de gradul p și a p ecuații de gradul II.

2) *În unele manuale mai vechi sînt numite ecuații reciproce și ecuațiile de forma*

1) $$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$$

avînd proprietatea următoare:

$$a_i = -a_{n-i} \text{ oricare ar fi } i,\ 0 \leq i \leq n.$$

Se observă imediat că dacă $n = 2p$ (număr par) atunci din $a_p = -a_{2p-p}$ obținem $a_p = -a_p$ și deci $a_p = 0$.

Orice ecuație reciprocă de tipul (1) are ca rădăcină pe $x = 1$. Atunci, conform teoremei lui Bézout putem scrie:

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = (x - 1)(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_1x + b_0) \text{ sau}$$
$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = b_{n-1}x^n + (b_{n-2} - b_{n-1})x^{n-1} + (b_{n-3} - b_{n-2})x^{n-2} + \dots$$
$$\dots + (b_0 - b_1)x - b_0$$

de unde obținem egalitățile:

$$a_n = b_{n-1},\ a_0 = -b_0,$$
$$a_{n-1} = b_{n-2} - b_{n-1},\ a_1 = b_0 - b_1,$$
$$a_{n-2} = b_{n-3} - b_{n-2},\ a_2 = b_1 - b_2.$$

Din prima egalitate, cum $a_0 = -a_n$, obținem $b_0 = b_{n-1}$.
Din a doua egalitate, cum $a_1 = -a_{n-1}$, obținem $b_1 = b_{n-2}$.
Din a treia egalitate, cum $a_2 = -a_{n-2}$, obținem $b_2 = b_{n-3}$.
Continuînd astfel obținem că $b_i = b_{(n-1)-i}$ oricare ar fi i, $0 \leq i \leq n - 1$, ceea ce ne arată că ecuația

$$b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \dots + b_1x + b_0 = 0$$

este o ecuație reciprocă.

În concluzie orice ecuație

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$$

avînd proprietatea că $a_i = -a_{n-i} (0 \leq i \leq n)$, *se reduce la rezolvarea unei ecuații reciproce de gradul* $n - 1$.

Exerciții

1. Să se rezolve ecuațiile bipătrate

a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$; b) $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$;
c) $x^4 - (1 + \sqrt{2})x^2 + \sqrt{2} = 0$; d) $x^4 - 4x^2 + 1 = 0$;
e) $x^4 - 6x^2 + 6 = 0$; f) $6x^4 - 5x^2 + 1 = 0$;
g) $32x^4 - 12x^2 + 1 = 0$; h) $x^4 - 1 = 0$.

2. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x^2 + \left(\frac{12}{x}\right)^2 = 40$; b) $\sqrt{2x^3 + 7x^2 - 5} = x^2 + x$;

c) $\sqrt{x^2 + 3} = 4 - 2x^2$; d) $x^2 - \left(\frac{6}{x}\right)^2 = 5$.

3. Să se determine ecuația de gradul IV, avînd ca rădăcini:

a) $x_1 = -4$, $x_2 = 4$, $x_3 = -3$, $x_4 = 3$;
b) $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = -\frac{1}{6}$, $x_4 = \frac{1}{6}$;
c) $x_1 = -3i$, $x_2 = 3i$, $x_3 = -2i$, $x_4 = 2i$;
d) $x_1 = -2$, $x_2 = 2$, $x_3 = -5$, $x_4 = 5$.

4. Să se determine natura rădăcinilor ecuațiilor:

a) $x^4 - 2(m - 2)x^2 - m^2 = 0$; b) $4x^4 + mx^2 + 9 = 0$;
c) $mx^4 + 4x^2 + 1 = 0$; d) $m^4x^4 - 2(2m^2 + 3)x^2 + 1 = 0$;
e) $3x^4 - 5mx^2 - 2m^2 = 0$; f) $x^2(2x^2 + 5) - m(x^2 + 3) = 3$.

5. Să se rezolve ecuația

$$ax^{2n} + bx^n + c = 0$$

și apoi să se aplice formula pentru cazurile particulare

a) $x^6 + 15x^3 - 16 = 0$; b) $x^8 + 2x^4 - 3 = 0$;
c) $x^6 - 7x^3 + 6 = 0$; d) $x^8 + 12x^2 - 13 = 0$.

6. Să se rezolve ecuaţiile de gradul III:

a) $5x^3 + 31x^2 + 31x + 5 = 0$; b) $2x^3 + 3x^2 + 3x + 2 = 0$;
c) $5x^3 - 31x^2 + 31x - 5 = 0$; d) $2x^3 - x^2 + x - 2 = 0$;
e) $x^3 + 4x^2 + 4x + 1 = 0$; f) $3x^3 + 2x^2 + 2x + 3 = 0$;
g) $x^3 + x^2 + x + 1 = 0$; h) $2x^3 + 5x^2 + 5x + 2 = 0$.

7. Să se determine relaţia între a şi b astfel încît ecuaţia reciprocă de gradul III $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$ $(a \in \mathbf{R}, b \in \mathbf{R})$ să aibă:

i) două rădăcini egale,
ii) toate rădăcinile reale,
iii) două rădăcini complexe.

8. Să se rezolve ecuaţiile reciproce de gradul IV:

a) $2x^4 + 7x^3 + 9x^2 + 7x + 2 = 0$;
b) $x^4 + x^3 - 18x^2 + x + 1 = 0$;
c) $4x^4 - x^3 + 5x^2 - x + 4 = 0$;
d) $x^4 + 2x^3 - x^2 + 2x + 1 = 0$;
e) $x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 2x + 1 = 0$;
f) $x^4 + 3x^3 - 2x^2 + 3x + 1 = 0$;
g) $x^4 + 3x^3 - 16x^2 + 3x + 1 = 0$.

9. Să se determine numărul real a astfel încît ecuaţia:

$$x^4 + 2x^3 + ax^2 + 2x + 1 = 0,$$

să aibă toate rădăcinile reale.

10. Să se arate că orice ecuaţie reciprocă de gradul $n = 2p$ se reduce la rezolvarea unei ecuaţii de gradul p şi a p ecuaţii de gradul doi.

11. Să se rezolve ecuaţiile reciproce de gradul V:

a) $20x^5 - 81x^4 + 62x^3 + 62x^2 - 81x + 20 = 0$;
b) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$;
c) $5x^5 - 4x^4 + 5x^3 + 5x^2 - 4x + 5 = 0$.

§ 9. Polinoame cu coeficienţi reali

Teorema 9.1. **Fie f un polinom nenul cu coeficienţi reali. Dacă $\alpha = a + ib$, $(b \neq 0)$ este o rădăcină complexă a lui f, atunci:**

1° $\bar{\alpha} = a - ib$ este de asemenea o rădăcină a lui f,

2° α şi $\bar{\alpha}$ au acelaşi ordin de multiplicitate.

Demonstraţie. 1° Am văzut în § 4 (proprietatea iii)) că $f(\bar{\alpha}) = \overline{f(\alpha)}$. Cum $f(\alpha) = 0$, atunci $f(\bar{\alpha}) = 0$ şi deci $\bar{\alpha}$ este o rădăcină a lui f.

2° Presupunem că m este ordinul de multiplicitate a lui α. Rezultă că există un polinom g astfel încît $f = (X - \alpha)^m g$ şi $g(\alpha) \neq 0$. Cum $b \neq 0$, atunci $\alpha \neq \bar{\alpha}$. Cum $f(\bar{\alpha}) = 0$, atunci $(\bar{\alpha} - \alpha)^m g(\bar{\alpha}) = 0$ de unde obţinem că $g(\bar{\alpha}) = 0$. Din teorema lui Bézout obţinem că există un polinom g_1 astfel încît

$g = (X - \bar{\alpha})g_1$. Deci $f = (X - \alpha)^m g = (X - \alpha)^m (X - \bar{\alpha})g_1 = (X - \alpha)(X - \bar{\alpha})(X - \alpha)^{m-1}g_1 = [X^2 - (\alpha + \bar{\alpha})X + \alpha\bar{\alpha}](X - \alpha)^{m-1}g_1$. Cum $\alpha + \bar{\alpha} = 2a$ şi $\alpha\bar{\alpha} = a^2 + b^2$ atunci $f = (X^2 - 2aX + a^2 + b^2)(X - \alpha)^{m-1}g_1$. Cum polinomul $X^2 - 2aX + a^2 + b^2$ are coeficienţi reali deducem că polinomul $f_1 = (X - \alpha)^{m-1}g_1$ are coeficienţi reali. Putem să scriem

$$f = (X^2 - 2aX + a^2 + b^2)f_1.$$

Dacă $m > 1$ continuăm procedeul cu polinomul f_1. Cum f_1 are rădăcina α atunci exact ca mai sus există un polinom g_2 astfel încît $f_1 = (X^2 - 2aX + a^2 + b^2)(X - \alpha)^{m-2}g_2$.
Deci $f = (X^2 - 2aX + a^2 + b^2)(X - \alpha)^{m-2}g_2$ şi polinomul $f_2 = (X - \alpha)^{m-2}g_2$ are coeficienţi reali. Dacă $m > 2$ atunci α este rădăcină pentru f_2 şi continuăm procedeul cu f_2.

În felul acesta după m paşi obţinem un polinom h cu coeficienţi reali astfel încît

$$f = (X^2 - 2aX + a^2 + b^2)^m h = (X - \alpha)^m (X - \bar{\alpha})^m h.$$

Din această egalitate rezultă că $(X - \bar{\alpha})^m \mid f$. De asemenea $(X - \bar{\alpha})^{m+1}$ nu divide pe f, deoarece în caz contrar am avea că $h(\bar{\alpha}) = 0$. Cum h are coeficienţi reali atunci $\alpha = \bar{\bar{\alpha}}$ este de asemenea o rădăcină a lui h şi deci $X - \alpha \mid h$. Dar atunci $(X - \alpha)^{m+1} \mid f$ ceea ce contrazice faptul că α are ordinul de multiplicitate m.

În concluzie $\bar{\alpha}$ este o rădăcină cu ordinul de multiplicitate m. Această teoremă este foarte utilă în multe aplicaţii cînd se cere determinarea rădăcinilor unui polinom (ecuaţii algebrice) şi cînd se cunoaşte o rădăcină complexă a sa.

Exemple

1) Să se determine rădăcinile polinomului

$f = X^4 - 3X^3 - X^2 + 9X - 18$, ştiind că admite rădăcina $\alpha_1 = 1 + i\sqrt{2}$.

Conform teoremei 9.1 polinomul va avea ca rădăcină şi pe $\alpha_2 = 1 - i\sqrt{2}$, deci se va divide cu

$$(X - 1 - i\sqrt{2})(X - 1 + i\sqrt{2}) = X^2 - 2X + 3.$$

Efectuînd împărţirea lui f prin $X^2 - 2X + 3$ se obţine descompunerea

$$f = (X^2 - 2X + 3)(X^2 - X - 6).$$

Polinomul $g = X^2 - X - 6$ are rădăcinile $\alpha_3 = -2$, $\alpha_4 = 3$.

2) Să se arate că polinomul $f = (1 + X)^{6k+1} - (1 + X)^{6k+2} - 1$ este divizibil cu $X^2 + X + 1$.

Rădăcinile lui $X^2 + X + 1$ sînt $\alpha = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ şi $\beta = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$. Pentru a arăta că f se divide cu $X^2 + X + 1 = (X - \alpha)(X - \beta)$ trebuie să arătăm că $f(\alpha) = f(\beta) = 0$. Dar cum $\beta = \bar{\alpha}$ este suficient să dovedim că $f(\alpha) = 0$. Într-adevăr

$$f(\alpha) = (1 + \alpha)^{6k+1} - (1 + \alpha)^{6k+2} - 1.$$

Dar $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ şi deci $1 + \alpha = -\alpha^2$. Obţinem atunci $f(\alpha) = (-\alpha^2)^{6k+1} - (-\alpha^2)^{6k+2} - 1 = -\alpha^{12k+2} - \alpha^{12k+4} - 1 = -(\alpha^3)^{4k} \cdot \alpha^2 - (\alpha^3)^{4k} \cdot \alpha^4 - 1$.
Cum $\alpha^3 = 1$ avem că $f(\alpha) = -\alpha^2 - \alpha^4 - 1 = -\alpha^2 - \alpha \cdot \alpha^3 - 1 = -\alpha^2 - \alpha - 1 = -(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0$.

Deci $f(\alpha) = 0$, ceea ce trebuia dovedit.

3) Fie polinomul $f = X^6 + X^5 + 3X^4 + 2X^3 + 3X^2 + mX + 1$. Să se determine m ştiind că admite ca rădăcină pe i şi apoi să se găsească celelalte rădăcini.

Cum i este rădăcină trebuie să avem că $f(i) = 0$. Deci $i^6 + i^5 + 3i^4 + 2i^3 + 3i^2 + mi + 1 = 0$ de unde obţinem că $-1 + i + 3 - 2i - 3 + mi + 1 = 0$ sau $(m - 1)i = 0$ şi deci $m = 1$. Cum f are ca rădăcină pe i rezultă că are ca rădăcină şi pe $-i$. Deci f se divide cu produsul $(X - i)(X + i) = X^2 + 1$. Deci $f = (X^2 + 1)(X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1)$.

Ecuaţia $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = 0$ este o ecuaţie reciprocă de gradul IV. Împărţim cu x^2 şi obţinem

$$x^2 + x + 2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0.$$

Notăm $y = x + \dfrac{1}{x}$; obţinem ecuaţia de gradul II în y:

$$y^2 + y = 0$$

care are rădăcinile $y_1 = 0$, şi $y_2 = -1$.

Ecuația $x + \frac{1}{x} = 0$ are rădăcinile $x_3 = i$, $x_4 = -i$.

Ecuația $x + \frac{1}{x} = -1$ are rădăcinile $x_5 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, $x_6 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$. Deci polinomul are ca rădăcini:

$$x_1 = i,\ x_2 = -i,\ x_3 = i,\ x_4 = -i,\ x_5 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2},\ x_6 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

Rădăcinile i și $-i$ sînt duble.

În continuare vom da cîteva consecințe ale teoremei 9.1.

Consecința 9.2. **Orice polinom cu coeficienți reali are un număr par de rădăcini complexe (care nu sînt numere reale).**

Din această consecință rezultă imediat:

Consecința 9.3. **Orice polinom cu coeficienți reali de grad impar are cel puțin o rădăcină reală.**

Teorema 9.4. **Orice polinom $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX$ de grad ≥ 1 cu coeficienți reali este un produs de polinoame de gradul I sau gradul II cu coeficienți reali, adică poate fi scris sub forma**

(1) $f = a_n(X-\alpha_1)^{k_1}\ldots(X-\alpha_p)^{k_p}(X^2+b_1X+c_1)^{r_1}\ldots(X^2+b_sX+c_s)^{r_s}$ unde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ și $b_1^2-4c_1 < 0, \ldots b_s^2-4c_s < 0$.

Demonstrație. Conform consecinței 7.3.4 f are descompunerea (2) $f = a_n(X - \alpha_1)^{k_1}(X - \alpha_2)^{k_2} \ldots (X - \alpha_n)^{k_n}$ unde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ sînt rădăcinile lui f. Presupunem că $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sînt toate rădăcinile reale ale lui f. Rădăcinile $\alpha_{p+1}, \ldots, \alpha_n$ sînt complexe. Luăm rădăcina α_{p+1} care are ordinul de multiplicitate k_{p+1}. Cum $\bar{\alpha}_{p+1}$ este o rădăcină a lui f, există o rădăcină $\alpha_{p+i} (i \geq 2)$ astfel încît $\alpha_{p+i} = \bar{\alpha}_{p+1}$. După teorema 9.1 avem $k_{p+1} = k_{p+i}$.
În descompunerea (2) grupăm factorul $(X - \alpha_{p+1})^{k_{p+1}}$ cu factorul

$$(X - \alpha_{p+i})^{k_{p+i}} = (X - \bar{\alpha}_{p+1})^{k_{p+1}}.$$

Notăm $r_1 = k_{p+1}$, $b_1 = -(\alpha_{p+1} + \bar{\alpha}_{p+1})$ și $c_1 = \alpha_{p+1} \cdot \bar{\alpha}_{p+1}$.
Atunci în descompunerea (2) apare factorul
$(X - \alpha_{p+1})^{k_{p+1}}(X - \bar{\alpha}_{p+1})^{k_{p+1}} = (X^2 + b_1X + c_1)^{r_1}$, unde $b_1, c_1 \in \mathbb{R}$. Dacă în continuare procedăm la fel cu toate rădăcinile complexe ale lui f descompunerea (2) a lui f se scrie sub forma (1).

Exerciții

1. Să se arate că dacă $a \neq b$, polinomul $f = aX^3 + X^2 + bX + 1$ nu are rădăcinile $\pm i$.
2. Să se determine a și b și apoi să se rezolve ecuația
$$x^4 - 7x^3 + 21x^2 + ax + b = 0,\ a, b \in \mathbb{R},$$
știind că $1 + 2i$ este rădăcină a ecuației.
3. Fie ecuația
$x^4 + (2a + 1)x^3 + 2(a + 1)^2x^2 + bx + c = 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ cu $a \geq 0$. Să se arate că această ecuație admite cel mult două rădăcini reale.
4. Să se determine rădăcinile polinomului
$$f = X^6 + X^5 + 3X^4 + 2X^3 + 3X^2 + X + 1$$
știind că admite rădăcina i.

5. Să se rezolve ecuația
$$x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 4x + 2 = 0$$
știind că admite rădăcina $1 + i$.
6. Să se rezolve ecuația
$$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 5 = 0$$
știind că admite rădăcina $2 - i$.
7. Fie ecuația
$$x^4 - \alpha x^3 - \alpha x + 1 = 0 \text{ cu } \alpha \in \mathbb{R} \text{ și } |\alpha| < 1.$$
Să se arate că toate rădăcinile sînt de modul 1.
8. Să se determine m și n și apoi să se rezolve ecuația
$$x^4 - x^3 + mx^2 + 2x + n = 0$$
știind că admite rădăcina $1 + i$.
9. Știind că polinomul $f = 3X^4 - 5X^3 + 3X^2 + 4X - 2$ are rădăcina $1 + i$, să se găsească celelalte rădăcini și să se descompună polinomul f în produs de polinoame de gradul I și II cu coeficienți reali.
10. Să se descompună polinomul $f = X^4 + X^2 + 1$ în factori cu coeficienți reali.
11. Să se descompună în factori cu coeficienți reali polinomul $X^4 + 1$.
12. Fie f și g două polinoame nenule cu coeficienți reali. Dacă polinomul $f(X^3) + Xg(X^3)$ este divizibil cu $X^2 + X + 1$, atunci f și g au rădăcina 1.
13. Fie f și g două polinoame nenule cu coeficienți reali. Dacă polinomul $f(X^3) + X^ng(X^3)$, este divizibil cu $X^2 + X + 1$, unde n este un număr natural care nu este divizibil cu 3, atunci f și g au rădăcina 1.
14. Să se determine polinoamele cu coeficienți reali de gradul cel mai mic care au ca rădăcini:
a) rădăcina dublă 2 și rădăcina simplă $1 + i$,
b) rădăcina dublă i și rădăcina dublă $2 - i$,
c) rădăcina triplă $-1 - i$ și rădăcinile simple 1 și -1.
15. Să se rezolve ecuația
$$(x + i)^n + (x - i)^n = 0$$
și să se arate că are toate rădăcinile reale.
16. Să se arate că polinomul
$$X^{4a} + X^{4b+1} + X^{4c+2} + X^{4d+3}$$
a, b, c, d fiind numere naturale, este divizibil prin $X^3 + X^2 + X + 1$.

§ 10. Polinoame cu coeficienți raționali și polinoame cu coeficienți întregi

Teorema 10.1. **Fie f un polinom nenul cu coeficienți raționali și $a + \sqrt{b}$ (cu $a, b \in \mathbb{Q}$, $b > 0$ și $\sqrt{b} \notin \mathbb{Q}$) o rădăcină a lui f.**
Atunci:
1° $a - \sqrt{b}$ este de asemenea o rădăcină a lui f;
2° $a + \sqrt{b}$ și $a - \sqrt{b}$ au același ordin de multiplicitate.

Demonstrație. 1° Conform proprietății iv) din § 4, avem $f(a \pm \sqrt{b}) = A \pm B\sqrt{b}$. Însă $f(a + \sqrt{b}) = 0$, deci $A + B\sqrt{b} = 0$. Dacă $B \neq 0$ atunci $\sqrt{b} = -\frac{A}{B} \in \mathbb{Q}$.

Dar $\sqrt{b} \notin Q$, deci trebuie ca $B = 0$. Cum $A + B\sqrt{b} = 0$ obținem că $A = 0$. În acest caz $f(a - \sqrt{b}) = A - B\sqrt{b} = 0$, și deci $a - \sqrt{b}$ este de asemenea o rădăcină a lui f.

2° Presupunem că $a + \sqrt{b}$ este o rădăcină a lui f avînd ordinul de multiplicitate m. Deci

$$f = [X - (a + \sqrt{b})]^m g \text{ și } g(a + \sqrt{b}) \neq 0.$$

Cum $a - \sqrt{b}$ este o rădăcină a lui f avem $f(a - \sqrt{b}) = 0$ și deci

$$[a - \sqrt{b} - (a + \sqrt{b})]^m g(a - \sqrt{b}) = 0$$

sau

$$(-2\sqrt{b})^m g(a - \sqrt{b}) = 0.$$

Cum $b \neq 0$, atunci trebuie ca $g(a - \sqrt{b}) = 0$.

Din teorema lui Bézout putem scrie $g = [X - (a - \sqrt{b})]g_1$, și deci $f = [X - (a + \sqrt{b})]^m[X - (a - \sqrt{b})]g_1 = [X^2 - 2aX + a^2 - b]\cdot[X - (a + \sqrt{b})]^{m-1}g_1$.

Cum $X^2 - 2aX + a^2 - b$ este un polinom cu coeficienți raționali, rezultă că polinomul $f_1 = [X - (a + \sqrt{b})]^{m-1}g_1$ are coeficienți raționali. În continuare se procedează exact ca în teorema 9.1.

Se obține că $a - \sqrt{b}$ este o rădăcină avînd ordinul de multiplicitate m.

Observații. 1) Teorema 10.1 se aplică numai atunci cînd polinomul cu coeficienți raționali are o *rădăcină pătratică*, adică un număr real de forma $a \pm \sqrt{b}$ unde $b > 0$ și $\sqrt{b}$ nu este un număr rațional.

2) Teorema 10.1 nu mai este adevărată cînd polinomul f nu are coeficienți raționali.

De exemplu, polinomul $f = X^2 - (\sqrt{2} + \sqrt{3})X + (\sqrt{6} + \sqrt{3} - \sqrt{2} - 1)$ are coeficienți nu toți numere raționale. Rădăcinile lui f sînt $1 + \sqrt{2}$ și $\sqrt{3} - 1$. Se observă că f nu are și rădăcina $1 - \sqrt{2}$.

Exemple. 1) Să se găsească rădăcinile polinomului $f = X^4 - 4X^3 + X^2 + 6X + 2$ știind că admite rădăcina $1 - \sqrt{2}$. Din teorema 10.1 rezultă că f are și rădăcina $1 + \sqrt{2}$. Deci f se divide cu produsul $[X - (1 - \sqrt{2})][X - (1 + \sqrt{2})] = X^2 - 2X - 1$. Efectuînd împărțirea lui f cu $X^2 - 2X - 1$, f se scrie

$$f = (X^2 - 2X - 1)(X^2 - 2X - 2).$$

Rădăcinile lui $g = X^2 - 2X - 2$ sînt $1 - \sqrt{3}$ și $1 + \sqrt{3}$. Deci f are rădăcinile $1 - \sqrt{2}$; $1 + \sqrt{2}$; $1 - \sqrt{3}$; $1 + \sqrt{3}$.

2) Să se determine un polinom f cu coeficienți raționali de gradul cel mai mic care admite ca rădăcini pe $3 + i$ și $1 - \sqrt{2}$. Într-adevăr, acest polinom trebuie să aibă și rădăcinile $3 - i$ și $1 + \sqrt{2}$. Atunci f se divide cu produsul

$$[X - (3 + i)][X - (3 - i)][X - (1 - \sqrt{2})][X - (1 + \sqrt{2})] =$$
$$= (X^2 - 6X + 10)(X^2 - 2X - 1) = X^4 - 8X^3 + 21X^2 - 14X - 10.$$

Deoarece ultimul polinom are coeficienți raționali, rezultă că $f = X^4 - 8X^3 + 21X^2 - 14X - 10$.

Teorema 10.2. Fie $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$ un polinom de gradul $n\cdot(n \geq 1)$ cu coeficienți întregi. Dacă $\alpha = \frac{p}{q}$ (p, q numere prime între ele) este o rădăcină rațională a lui f atunci:

1° p divide termenul liber a_0;

2° q divide coeficientul termenului de grad maxim a_n.

Demonstrație. Cum $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$, avem

$$(1) \qquad a_0 + a_1\frac{p}{q} + a_2\left(\frac{p}{q}\right)^2 + \ldots + a_n\left(\frac{p}{q}\right)^n = 0.$$

Înmulțind (1) cu q^n, obținem

$$a_0q^n + a_1pq^{n-1} + a_2p^2q^{n-2} + \ldots + a_{n-1}p^{n-1}q + a_np^n = 0,$$

de unde obținem

$$(2) \qquad a_0q^n = p(-a_1q^{n-1} - a_2pq^{n-2} - \ldots - a_np^{n-1})$$

și

$$(3) \qquad a_np^n = q(-a_0q^{n-1} - a_1pq^{n-2} - \ldots - a_{n-1}p^{n-1}).$$

Din (2) rezultă că $p \mid a_0q^n$. Cum p și q sînt prime între ele, atunci p și q^n sînt prime între ele și deci trebuie ca p să dividă pe a_0.

Analog din (3) rezultă că $q \mid a_np^n$. Cum p și q sînt prime între ele obținem că q divide pe a_n.

Consecința 10.3. Fie $f = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$, un polinom cu coeficienți întregi. Dacă $\alpha = p$ este o rădăcină întreagă a lui f atunci p este un divizor al termenului liber a_0.

Demonstrație. Cum $\alpha = p = \frac{p}{1}$ atunci aplicînd teorema 10.2 se obține că $p \mid a_0$.

Exemple. 1) Să se determine rădăcinile polinomului

$$f = X^4 - 2X^3 - 5X^2 + 8X + 4.$$

Mai întîi încercăm să vedem dacă f are rădăcini întregi. Acestea, dacă există, se găsesc printre divizorii lui 4 care sînt ±1, ±2, ±4.

Se vede că $f(1) = 6$ și $f(-1) = -6$;

$$f(2) = 0 \text{ și } f(-2) = 0;$$
$$f(4) = 84 \text{ și } f(-4) = 276.$$

Deci 2 și -2 sînt rădăcini pentru f. Înseamnă că f se divide cu $(X - 2)(X + 2) = X^2 - 4$. Polinomul f se scrie

$$f = (X^2 - 4)(X^2 - 2X - 1).$$

Rădăcinile lui $X^2 - 2X - 1$ sînt $1 - \sqrt{2}$ și $1 + \sqrt{2}$. Deci polinomul f are rădăcinile: $-2, 2, 1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}$.

2) Să se determine rădăcinile polinomului

$$f = 6X^4 - 17X^3 - X^2 + 8X - 2.$$

Divizorii lui 2 sînt ±1, ±2, iar divizorii lui 6 sînt ±1, ±2, ±3 și ±6.

Conform teoremei 10.2 f poate avea rădăcinile fracționare:

$$\pm1, \pm2, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{2}{3}.$$

Avem

$$f(1) = -6;\ f(-1) = 12;\ f(2) = -30;\ f(-2) = 210;$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0;\ f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{15}{4};\ f\left(\frac{1}{3}\right) = 0;\ f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{110}{27};\ f\left(\frac{1}{6}\right) = -\frac{83}{108};$$

$$f\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{59}{18};\ f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{26}{27};\ f\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{14}{9}.$$

Rezultă că f are rădăcinile $\frac{1}{2}$ și $\frac{1}{3}$. Deci f se divide cu produsul $(2X - 1)(3X - 1)$.

Efectuînd împărțirea obținem că $f = (2X - 1)(3X - 1)(X^2 - 2X - 2)$.

Rădăcinile polinomului $X^2 - 2X - 2$ sînt $1 - \sqrt{3}$ și $1 + \sqrt{3}$. Deci f are rădăcinile: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $1 - \sqrt{3}$, $1 + \sqrt{3}$.

Exerciții

1. Să se rezolve ecuația $2x^5 - 5x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 1 = 0$, știind că admite rădăcina $1 + \sqrt{2}$.

2. Să se rezolve ecuația $x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x - 2 = 0$ știind că admite rădăcina $1 - \sqrt{3}$.

3. Să se determine rădăcinile polinomului $f = X^5 - 3X^4 - 19X^3 + 91X^2 - 80X - 50$ știind că una din rădăcinile lui este $3 + i$ iar alta este $1 - \sqrt{2}$.

4. Să se determine rădăcinile polinomului $f = X^4 - 5X^3 + X^2 + 6$ știind că admite rădăcina $3 + \sqrt{3}$.

5. Să se determine rădăcinile polinomului $f = X^5 + 3X^4 + X^3 - 5X^2 - 6X - 2$ știind că admite rădăcina $\sqrt{2}$.

6. Să se afle rădăcinile raționale ale următoarelor polinoame:

a) $X^3 + 3X - 14$;

b) $X^4 - X^3 - 12X^2 + 6X + 36$;

c) $X^5 + 7X^4 + 18X^3 + 22X^2 + 13X + 3$;

d) $X^5 + 6X^4 + 13X^3 + 14X^2 + 12X + 8$;

e) $X^5 + 8X^4 + 5X^3 - 50X^2 - 36X + 72$;

f) $6X^4 - 43X^3 + 107X^2 - 108X + 36$.

7. Fie f un polinom nenul cu coeficienți întregi. Dacă $\alpha = \frac{p}{q}$ este o fracție rațională ireductibilă, rădăcină a lui f, atunci $p - q$ divide pe $f(1)$.

Răspunsuri și indicații

Capitolul I

§ 1.

1. a) $3^{\frac{5}{6}}$; b) $\sqrt[15]{6^7}$; c) $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{7}{2}}$; d) egale; e) egale; f) $2^{-\sqrt{3}}$; g) $5^{\sqrt{3}}$; h) $\sqrt[6]{\left(\frac{7}{8}\right)^{38}}$.

2. a) $2^{-1-\sqrt{3}}$; b) $(3 \cdot 2^{20})^{\sqrt{3}}$; c) 5^{-5}; d) $2^{-\frac{\sqrt{3}}{4}}$. **3.** a) $x \geqslant 6$; b) $x \leqslant -2$; c) $x > -7$; d) $x < 1$; e) $x > -8$; f) $x < 8$; g) $x < \frac{1}{8}$; h) $x < -10$; i) $x > -21$. **4.** a) $m > n$; b) $m > n$; c) $m \leqslant n$; d) $m \geqslant n$. **5.** mai mari decît 1; b) d); e); mai mici decît 1: a); c); f) **6.** a) $\left(\frac{1}{\pi}\right)^{-\sqrt{2}}$; b) $\left(\frac{\pi}{6}\right)^2$; c) $\left(\frac{2}{5}\right)^{1+\sqrt{6}}$; d) $(\sqrt{5})^{\sqrt{3}-2}$. **7.** dacă $0 < a < 1$, atunci $x < 0$; dacă $a > 1$, atunci $x > 0$. **8.** a) pentru $a > 1$, da; pentru $0 < a < 1$, nu; b) da; c) da; d) nu.

§ 2.

1. a) $x < 1$; b) $-1 < x < 1$; c) $x \in \mathbb{R}$; d) $x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$; e) $x \in (2, 3)$; f) $x \in \mathbb{R}$; g) $x > 1$; h) $x > 1$; i) $0 < x < 1$. **2.** a) $\log_2 5$; b) $\log_3 10$; c) $\log_5 1/2$; d) 3. **3.** a) $x > 4$; b) $0 < x \leqslant \frac{5}{2}$; c) $x \in (-\infty, -2\sqrt{2}] \cup [2\sqrt{2}, +\infty)$; d) $x \in (1, 5]$. **5.** a) 2; b) 2; c) 2; d) 2; e) -2; f) 2; g) 1; h) -1. **6.** a) $-0{,}15490$; b) $0{,}28170$; c) $1{,}54407$; d) $2{,}24304$; e) $1{,}19458$. **7.** a) $E = \log_7 8$; b) $E = \log_2 3$; c) $\frac{1}{2}$. **8.** a) $\log_a E = 2\log_a 41 + \frac{1}{13}(\log_a 41 + 5\log_a 37)$; b) $\log_a E = 3\log_a 31 + \frac{1}{7}(\log_a 41 + 4\log_a 33) - 2\log_a 17 - \frac{1}{3}(2\log_a 23 + \log_a 29)$; c) $\log_\alpha E = 2\log_\alpha a + \frac{1}{5}(\log_\alpha a + 3\log_\alpha b + \log_\alpha c)$. **9.** $x = \frac{12}{5}$; b) $x = \frac{7^2 6^3}{5^4}$; c) $x = \frac{a^2(a+b)^3}{(a-b)^4}$; d) $x = \sqrt[4]{\frac{(a-b)\sqrt[3]{4b^2}}{\sqrt[3]{(a+b)^2}\sqrt{2a}(a+b)^2}}$.

§ 3.

1. 0; 1; 2; 3; -2; -1; -4; 1. 2. **2.** 0,778; 1,176; 1,505; 1,477; 2,921.

§ 4.

1. a) 3; b) 5; c) -3; d) $-\frac{1}{2}$; e) 2; f) $\frac{4}{3}$; g) -4; h) $\frac{2}{3}$. **2.** a) $\frac{5}{2}$; b) 3; c) $\frac{5}{2}$; d) $x_1 = 7$. $x_2 = -1$; e) $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. **3.** a) 4; b) 1; c) d) 1; e) 2. **4.** a) 35; b) $\frac{17}{13}$; c) 24. **5.** a) 2; b) 1; c) 3; d) 4; e) $x_1 = \log_5 3$, $x_2 = \log_5 \frac{5}{4}$; f) 0; g) $x_s = 0$; $x_2 = 1$ h) 0; i) $x_1 = 0$; $x_2 = 1$. **6.** a) 1; b) $\log_{\frac{3}{2}} \frac{7}{5}$; c) 0; d) 0; e) 4. **7.** a) 2; b) $\frac{1}{2}$; c) 5; d) 4. **8.** a) 4; b) $\sqrt{\frac{2}{3}}$; c) 2. **9.** a) $x_1 = 10$; $x_2 = 10^{-4}$; b) $x_1 = \sqrt[3]{10}$; $x_2 = \frac{1}{\sqrt[4]{10}}$; x_2 c) $x_1 = 10^{\frac{1}{3}}$, $x_2 = 10^{-\frac{1}{6}}$; d) $x_1 = \frac{1}{5}$, $x_2 = \frac{1}{5} \cdot 3^{\frac{7}{4}}$. **10.** 100. **11.** $x_1 = 2^{\frac{1}{4}}$; $x_2 = 2^4$. **12.** a) $x_1 = 5, y_1 = 2$ sau $x_2 = 2, y_2 = 5$;

b) (2, 1); c) (100, 10); d) (4, 2); e) $x_1 = 4$, $y_1 = 10$ sau $x_2 = 10$, $y_2 = 4$; f) (1, 1). **13.** a) $x \in (-3, -2) \cup (3, +\infty)$; b) $0,01 \leqslant x \leqslant 10000$; c) $x \leqslant -4$. **14.** a) $0 < x < 3$; b) $2 \leqslant x \leqslant 4$. **15.** Împărțind cu 5^x obținem inecuația: $\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x > 1$; funcția $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$ este strict descrescătoare și $f(2) = 1$ deci $f(x) > 1$ pentru $x < 2$. **16.** a) pentru $0 < a < 1$, $0 < x \leqslant a$; pentru $a > 1$, $x \geqslant a$; b) pentru $0 < a < 1$, $x > 5$; pentru $a > 1$, $0 < x < 5$.

Capitolul II

§ 1.

6. $S_1 = 1 \cdot 1! = 1$, $S_2 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! = 5$, $S_3 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! = 23$, $S_4 = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + 4 \cdot 4! = 119$. Examinînd aceste rezultate, se observă că avem: $S_1 = 2! - 1$, $S_2 = 3! - 1$, $S_3 = 4! - 1$, $S_4 = 5! - 1$. Formulăm următoarea ipoteză: Pentru orice $n \geqslant 1$, are loc $S_n = (n + 1)! - 1$. Aceasta se demonstrează prin inducție matematică.
8. Avem $P_2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$, $P_3 = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) = \frac{2}{3}$, $P_4 = \left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) = \frac{5}{8}$. Observăm că $P_2 = \frac{2 + 1}{2 \cdot 2}$, $P_3 = \frac{3 + 1}{2 \cdot 2}$, $P_4 = \frac{4 + 1}{2 \cdot 4}$. Atunci, în general, formulăm următoarea ipoteză: Pentru orice $n \geqslant 2$, avem $P_n = \frac{n + 1}{2n}$. Aceasta se demonstrează prin inducție matematică.

§ 2.

1. a) (2). b) (4, 5), (5, 4); c) (α, β, γ), (α, γ, β), (β, α, γ), (β, γ, α), (γ, α, β), (γ, β, α).
2. a) 5760; b) 322 560; d) $n(n - 1)$; e) $(n - 3)(n - 4)$; f) $\frac{n^2 + 3n + 1}{(n + 2)!}$. **3.** a) $n = 7$; b) $n = 6$; c) $n = 2$.
4. a) $n \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; b) $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. **5.** $4! = 24$.
6. $10! = 3628800$. **8.** Dacă fixăm un element din A (pe primul loc) și un element din B (pe ultimul loc) obținem $(m + n - 2)!$ posibilități de a ordona celelalte elemente. Dar cum A are m elemente, iar B are n elemente rezultă că sînt mn posibilități de așezare a unui element din A pe primul loc și a unui element din B pe ultimul loc. Deci numărul permutărilor este $mn(m + n - 2)!$. **9.** Dacă n este numărul de elemente al mulțimii, atunci $500 \leqslant n! \leqslant 1\,000$, de unde $n = 6$. **10.** $6! - 5! = 600$. **11.** $(n - 1)!$ **13.** 48. **14.** $A_8^4 = 1\,680$ moduri; dacă unul din examene trebuie dat în ziua a 8-a, atunci avem $4 \cdot A_7^3 = 840$ moduri. **15.** $A_{30}^2 = 30 \cdot 29 = 870$. **16.** a) $(n - 4)^2$; b) $n(n - 1)$; c) $2nA_{2n+1}^{k+1}$.
17. a) $n \in \{9, 10\}$; b) 19; c) $n = 10$. **18.** Trebuie să avem $A_n^k = pA_n^{k-2}$. Rezultă că problema este posibilă dacă numărul p este produsul a două numere naturale consecutive, adică $p = m(m + 1)$. Apoi, se deduce că $n = k + m - 1$. **19.** a) $\varnothing$, {3}, {4}, {3, 4}. **20.** $C_{30}^3 = 4\,060$. **21.** $C_n^2 = \frac{n(n - 1)}{2}$. **22.** $C_9^4 = 126$; $C_{10}^4 = 210$. **23.** a) $C_n^2 - C_k^2 + 1$; b) $C_n^3 - C_k^3$. **24.** $C_{20}^4 \cdot C_3^1 = 14\,535$.
25. $C_9^3 \cdot C_6^3 \cdot C_3^3 = 1\,680$. **26.** a) 45; b) 560; c) $C_{n+1}^{k+1} = \frac{(n + 1)n \ldots (n - k + 1)}{1 \cdot 2 \ldots (k + 1)}$; d) 101; e) $C_{n-k}^{k+1} = \frac{(n - k)(n - k - 1) \ldots (n - 2k)}{1 \cdot 2 \ldots (k + 1)}$; f) 90. **27.** a) 6; b) 5; c) 4; d) 17. **28.** O clasă oarecare conține C_n^k submulțimi. Așadar se cere să determinăm care din numerele $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n$ este cel mai mare. Deoarece $C_n^k = \frac{n - k + 1}{k} C_n^{k-1}$, avem $C_k^{k-1} < C_n^k$, dacă $\frac{n - k + 1}{k} > 1$, de unde $k < \frac{n + 1}{2}$; iar $C_n^{k-1} > C_n^k$, dacă $\frac{n - k + 1}{2} < 1$, de unde $k > \frac{n + 1}{2}$. Dacă $n = 2m$ este număr par, atunci C_{2m}^m este cel mai mare dintre numerele C_{2m}^k. Dacă $n = 2m + 1$ este un număr impar, $C_{2m+1}^m = C_{2m+1}^{m+1}$ este cel mai mare. **29.** a) $n > 11$; b) $7 \leqslant n < 12$; c) $1 \leqslant k \leqslant 10$; d) $k > 9$. **32.** $C_7^3 C_4^2 + C_7^2 C_4^3 + C_7^1 C_4^1$.

§ 3.

1. a) $x^{12} - 6ax^{10} + 15a^2x^8 - 20a^3x^6 + 15a^4x^4 - 6a^5x^2 + a^6$; b) $a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$; c) $a^2 - 4a\sqrt{ab} + 6ab - 4b\sqrt{ab} + b^2$; d) $x^7 + 14x^6 + 84x^5 + 280x^4 + 560x^3 + 672x^2 + 448x + 128$. **2.** a) $-330x$; b) $70\sqrt{2}\, a^3b^2\sqrt{a}$; c) $-20xy\sqrt{xy}$; d) $126a^2b\sqrt{a}\sqrt[3]{b}$, $-126\, a^2b^2\sqrt[3]{b^2}$.
3. a) $k = 3$; b) $\frac{286}{3^7} a^4$; c) $k = 6$.
4. $k = 9$. **5.** $n = 17$. **6.** 26. **7.** $70a^3$. **8.** Din dezvoltare, avem $nm - (m + p)k = 0$, $nm - 11(m + p) = 1$, $nm - 23(m + p) = 5$. Scăzînd prima ecuație din celelalte două și făcînd cîtul se obține $\frac{k - 11}{k - 23} = \frac{1}{5}$, de unde $k = 8$. Apoi, $m + p = -\frac{1}{3}$, $n = -\frac{8}{3m}$ și deoarece n este întreg pozitiv, avem $n = 8l$, cu l întreg pozitiv ș.a.m.d.
9. Punem $x^2 = y^3 = 1$. Atunci dezvoltînd după formula binomului lui Newton și înlocuind x^2 și y^3 prin 1, obținem suma căutată a coeficienților. Astfel suma coeficienților este egală cu $(7 - 6)^9 = 1$. **10.** a) 51; b) 26.
11. a) Deoarece $\frac{n + 1}{k + 1} C_n^k = C_{n+1}^{k+1}$, atunci $C_n^0 + \frac{1}{2} C_n^1 + \ldots + \frac{1}{n + 1} C_n^n = \frac{1}{n + 1}(C_{n+1}^1 + C_{n+1}^2 + \ldots + C_{n+1}^{n+1}) = \frac{1}{n + 1}(2^{n+1} - 1)$; b) În dezvoltarea $(1 + x)^{n+1} = 1 + C_{n+1}^1 x + C_{n+1}^2 x^2 + \ldots + C_{n+1}^{n+1} x^{n+1}$ care se poate scrie: $\frac{(1 + x)^{n+1} - 1}{n + 1} = C_n^0 x + \frac{C_n^1}{2} x^2 + \frac{C_n^2}{3} x^3 + \ldots + \frac{C_n^n}{1 + n} x^{n+1}$, pentru $x = 1$ se obține a) și pentru $x = k$ se obține b); c) Se folosește egalitatea: $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$; d) Se folosește aceeași egalitate ca la punctul c); e) Dacă S_1 este prima sumă, iar S_2 cea de-a doua se calculează $S_1 + iS_2$.

§ 4

3. a) Numărul -102 este al 27-lea termen al șirului; b) nu este; c) nu este; d) nu este. **4.** b) în șir termenul al 8-lea și termenul al 9-lea sînt egali cu -72; c) nu este **5.** d) $3, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{3}, 3, \frac{1}{3}$; e) $-1, 1, 0, 1, 1, 2$; f) $3, 1, 2, -1, 3, -4$. **6.** $a_{2k-1} = 0$, $a_{2k} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2k - 2)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (2k - 1)} \cdot \frac{1}{k}$ $(k \geqslant 1)$.
8. a) $b_1 = 3, b_2 = 9$; b) $b_1 = -23, b_2 = -16$. **9.** a) $c_9 = 25, c_2 = 4, c_{15} = 43$; b) $c_{16} = 0$, $c_7 = 45$, $c_{19} = -15$. **10.** a) $a_{12} = 3,5$; b) $a_{19} = -24$; c) $a_{50} = -100,5$; d) $a_{25} = 8\frac{3}{7}$. **11.** a) 23; b) 130. **12.** a) $c_1 = 21$, $r = 1,5$; b) $c_1 = 120$, $r = -1$; c) $c_1 = 38$, $r = -2$; e) sau $a_1 = 2$, $r = 3$, sau $a_1 = 14$, $r = -3$. **13.** a) $y_1 = -3$, $r = 2$. **14.** a) 8 000; b) 650; c) -24550; d) 4 850. **15.** a) $-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, 1\frac{1}{4}$. **16.** a) 55; b) 1. **17.** 100; **19.** 2 500. **21.** a) Dacă α, β, γ sînt trei numere, atunci ele sînt în progresie aritmetică dacă $\alpha + \gamma = 2\beta$. Avem $\frac{a}{x + 1} + \frac{x^2 + a - 1}{x(x + 1)} = 2\,\frac{x + a - 1}{2x}$; b) vezi indicația de la a). **22.** vezi indicația de la problema precedentă. **23.** vezi indicația de la problema 21; i) este adevărată și reciproca; ii) dacă $a + b + c \neq 0$ este adevărată și reciproca.
25. Se face inducție matematică după n. **28.** $b_7 = 96$, $b_9 = 384$, $b_{10} = 768$ sau $b_7 = 96$, $b_9 = 384$, $b_{10} = -768$; b) $b_6 = -10$, $b_{12} = -10$, $b_3 = 10$. **31.** a) $a_1 = 1$, $q = -3$; b) $a_1 = \frac{1}{2}$, $q = -\frac{1}{2}$; c) $a_1 = \frac{5^7}{3^5}$, $q_1 = 0,6$ sau $a_1 = -\frac{5^7}{3^5}$, $q_1 = -0,6$. **32.** d) 2 731; e) $\frac{x^{101} - 1}{x - 1}$, dacă $x \neq 1$; 101, dacă $x = 1$. **33.** a) Ecuația devine $\frac{x^{100} - 1}{x - 1} = 0$ cu $x \neq 1$; b) Ecuația devine $\frac{x^{101} - 1}{x - 1} = 0$ cu $x \neq 1$. **34.** $y_1 = 8$, $y_2 = 40$, $S_4 = 1\,248$.

35. a) nu este; b) este; c) nu este. **37.** $x = \dfrac{b^2 - ac}{a + c - 2b}$, dacă $a + c - 2b \neq 0$.
38. Numerele x, y, z rezultă din sistemul: $xz = y^2$, $x + z = 2(y + a)$, $x(z + b) = (y + a)^2$.

Capitolul III

§ 1.

1. a) cîtul -25, restul 188; b) -27, 132; c) 136, 10; d) $-2\ 342$, 0.

2. 87 și 6 525; soluția este unică. **3.** 6, 5, 1, 4, 13, 7. **6.** Se ține cont de unicitatea împărțirii cu rest. **7.** 24. **8.** Dacă n este par atunci n^2 este de forma $4k$; dacă n este impar atunci n^2 este de forma $8k + 1$ (în particular fiind și de forma $4k' + 1$, cu $k' = 2k$); nu există numere pătrate perfecte care să dea restul 2 sau 3 prin împărțirea la 4.

§ 2.

2. ± 1, ± 2. **3.** Rezultă $a = 3k \pm 1$, $b = 3k' \pm 1$ și se analizează toate cazurile. **4.** $1\ 000 = 999 + 1 = 27 \cdot 37 + 1 = 37p + 1$. Din formula binomului lui Newton rezultă $1\ 000^k - 1 = (37p + 1)^k - 1 = 37l$, $l \in \mathrm{N}$. **5.** $p = 3k - 1$. **6.** $9^{20} - 7^{20}$ are ultima cifră 0. **8.** Avem $(n + 1)^n = n^n + C_n^1 n^{n-1} + \ldots + C_n^{n-2} \cdot n^2 + C_n^{n-1} \cdot n + 1 = n^2 \cdot k + 1$, $k \in \mathrm{N}$. **9.** Din $(n + 1) \mid (n + 1)^2$ rezultă că $(n + 1) \mid n^2 + 2n + 1 - n^2 - 1$ deci $(n + 1) \mid 2n$. Dar $(n + 1) \mid 2(n + 1)$, deci $(n + 1) \mid 2n + 2 - 2n$. Prin urmare $(n + 1) \mid 2$, adică $n \in \{-3, -2, 0, 1\}$. **10.** $n^3 - n = (n - 3)(n^2 + 3n + 9) + 24$; deci $n - 3$ este divizor al lui 24, adică $n - 3 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 8, \pm 12, \pm 24\}$.

§ 3.

1. a) 4; b) 15; c) 19; d) 76; e) 12; f) 15. **4.** $a = -25$, $b = 35$. **5.** $a = 24$, $b = 9$ sau $a = 72$, $b = 3$. **6.** Dacă $d \mid 2k + 1$ și $d \mid 9k + 4$ atunci $d \mid 9(2k + 1) - 2(9k + 4)$ deci $d \mid 1$. **7.** Pentru $k = 17l + 9$, c.m.m.d.c. este 17, In rest numerele sînt prime între ele. **8.** Dacă $(k, l) = d'$ atunci $d'd \mid ka$ și $d'd \mid lb$, deci $d'd \mid d$, adică $d' = \pm 1$.

§ 4.

3. 48 și respectiv 1 260. **4.** $7^4 \cdot 11^2$. **5.** Fie p un număr prim, cu $p \mid ab$. Atunci $p \mid a$ sau $p \mid b$; dacă $p \mid a$ și $p \mid a + b$ atunci $p \mid b$, absurd. Celelalte situații se tratează analog. Dacă a și b au parități diferite atunci $a + b$ și $a - b$ sînt impare și dacă $p \mid a \pm b$, atunci $p \mid a + b + a - b$, deci $p \mid 2a$, adică $p \mid a$. Prin urmare $p \mid a + b - a$, absurd.

6. Dacă $d \mid a$ și $d \mid b$, atunci $d \mid a + b$, deci $d = \pm 1$.

7. Avem $[a, b] = \dfrac{a \cdot b}{(a, b)} = a \cdot b$. Deci $ab \mid c$, deoarece c este multiplu comun pentru a și b.

8. Dacă $p \mid a$ și $p \mid bc$, cu p prim, atunci $p \mid b$ sau $p \mid c$, absurd.

9. Avem $\dfrac{b}{(a, b)} \,\Big|\, \dfrac{ac}{(a, b)}$, deci $\dfrac{b}{(a, b)} \,\Big|\, \dfrac{a}{(a, b)} \cdot c$, dar $\dfrac{b}{(a, b)}$ este prim cu $\dfrac{a}{(a, b)}$, deci $\dfrac{b}{(a, b)} \,\Big|\, c$. Prin urmare, $b \mid (a, b)c$. Rezultă că $\dfrac{b}{(b, c)} \,\Big|\, (a, b) \cdot \dfrac{c}{(b, c)}$. Dar $\dfrac{b}{(b, c)}$ este prim cu $\dfrac{c}{(b, c)}$, deci $\dfrac{b}{(b, c)} \,\Big|\, (a, b)$, adică $b \,\Big|\, (a, b) \cdot (b, c)$. **10.** Rezultă din descompunerea în factori primi a lui a și b.

11. Din teorema de descompunere în factori primi. **12.** Din teorema de descompunere în factori primi aplicată lui a și b.

13. $8^n + 1 = (2^n)^3 + 1 = (2^n + 1)(2^{2n} - 2^n + 1)$.

14. Dacă $n = p(p - 1)$ cu p prim, $p \neq 2$, atunci $2^{p(p-1)} - 1 = (2^{p-1} - 1)k$, și din teorema lui Fermat avem $p \mid 2^{p-1} - 1$. De exemplu $(6, 2^6 - 1) = (6, 63) = 3$. **16.** Trebuie să avem $3^n = 10^5 k + 1$. Pentru fiecare $n \in \mathrm{N}$ considerăm restul împărțirii lui 3^n la 10^5. Putem obține doar 10^5 resturi distincte, deci există $n_1 > n_2$, astfel încît $10^5 \mid (3^{n_1} - 3^{n_2})$, deci $10^5 \mid 3^{n_2}(3^{n_1 - n_2} - 1)$ și deoarece $(10^n, 3^{n_2}) = 1$, rezultă $10^5 \mid 3^{n_1 - n_2} - 1$, adică $3^{n_1 - n_2} - 1 = 10^5 k$.
17. Deoarece 10^5 și 1 979 sînt prime între ele rezultă că există $k, l \in \mathrm{N}^*$ astfel încît:

$$10^5 \cdot k - 1\ 979 l = 1, \text{ deci}$$
$$10^5 \cdot k + 1\ 978 = 1\ 978 + 1\ 979 l + 1, \text{ deci}$$
$$10^5 \cdot k + 1\ 978 = 1\ 979(l + 1).$$

Capitolul IV

§ 1 — § 4

3. $f + \bar{f} = (a_0 + \bar{a}_0) + (a_1 + \bar{a}_1)X + \ldots + (a_n + \bar{a}_n)X^n$; numerele $a_0 + \bar{a}_0, a_1 + \bar{a}_1, \ldots, a_n + \bar{a}_n$ sînt reale; $f\bar{f} = a_0\bar{a}_0 + (a_0\bar{a}_1 + a_1\bar{a}_0)X + (a_0\bar{a}_2 + a_1\bar{a}_1 + a_2\bar{a}_0)X^2 + \ldots + a_n\bar{a}_n X^{2n}$, numerele $a_0\bar{a}_0$, $a_0\bar{a}_1 + a_1\bar{a}_0 + a_0\bar{a}_2 + a_1\bar{a}_1 + a_2\bar{a}_0, \ldots, a_n\bar{a}_n$ sînt reale.

4. grad $(fg) = 0 \Rightarrow$ grad f + grad $g = 0 \Rightarrow$ grad $f = 0 \Rightarrow f \in \mathbf{C}$.

6. a) $m = 1 \Rightarrow$ grad $f = 0$; $m = 2 \Rightarrow$ grad $f = 2$; $m \neq 1,2 \Rightarrow$ grad $f = 3$; b) $m = \pm i \Rightarrow$ grad $f = 1$; $m \neq \pm i \Rightarrow$ grad $f = 4$; **7.** Dacă $f = a_0 + a_1 X + \ldots + a_k X^k + \ldots + a_n X^n$; dacă $a_k \neq 0$ luăm $g = -a_{k+1}X^{k+1} - \ldots - a_n X^n$; dacă $a_k = 0$ luăm $g = X^k - a_{k+1}X^{k+1} - \ldots - a_n X^n$. **9.** $f = 1 - 5X + 2X^2$. **10.** $f(0) \geqslant 0 \Rightarrow b \geqslant 0$; $f(1) \leqslant 1 \Rightarrow a \leqslant 1$; **11.** $f(X) = X^2$.

§ 5.

1. a) $q = X^4 + X^3 - 2X^2 - 6X - 8$; $r = 7X + 20$; b) $q = X - 6$; $r = -7X^2 - 7X + 7$; c) $q = X^2 + 2X$; $r = -4X + 2$; d) $q = X^2 - X$; $r = X^2 + 2X - 6$; e) $q = X^5 - X^4 - X^3 + X^2 + X - 1$; $r = 0$; f) $q = X^{20} - X^{19} + X^{17} - X^{16} - X^{15} + 2X^{14} - X^{13} - X^{12} + 2X^{11} - X^{10} - X^9 + 3X^8 - 2X^7 - X^6 + 3X^5 - 2X^4 + 2X^2 - 2X + 2$; $r = 0$.

2. Se scrie $f = (X^2 - 5X + 8)q + 2X - 7$. Cum $f(0) = -15$ și $f(3) = 3$ se obține $i = X^3 - 6X^2 + 15X - 15$. **3.** Se aplică unicitatea formulei împărțirii cu rest. **4.** $m = 0$, ç $= p - 1$. **5.** a) $q = X^3 - 2X^2 - 4X - 10$; $r = -9$; b) $q = X^5 - 2X^4 + 2X^3 + X^2 - X - 5$; $r = 7$; c) $q = X^4 + X^3 + X + 1$; $r = 0$; d) $q = X^4 - 4X^3 + 7X^2 - 12X + 24$; $r = -50$; e) $q = X^5 - \dfrac{3}{2}X^4 - \dfrac{1}{2}X^3 + \dfrac{1}{8}X^2 - \dfrac{1}{16}X + \dfrac{193}{32}$; $r = -\dfrac{257}{64}$; f) $q = X^2 + \dfrac{7}{2}X - \dfrac{15}{4}$; $r = \dfrac{23}{4}$; g) $q = X^3 + \dfrac{5}{3}X^2 - \dfrac{7}{9}X + \dfrac{47}{27}$; $r = \dfrac{209}{27}$.

6. $f = X$. **7.** $m = -\dfrac{25}{8}$. **8.** $m = \pm 3$. **9.** $a = 3$, $b = 2$. **10.** $X^4 - 2X^3 - X^2 + 2$.

§ 6.

3. $m = 8$. **4.** $a = -32$, $b = 101$, $c = -99$. **5.** $p = 1 - q^2$, $m = -q$. **6.** $a = -9$, $b = 12$. **7.** În general, nu. 8 și **9.** se aplică teorema 6.2.4. **10.** a) $X^3 + 1$; b) $X^2 - 2X + 2$; c) $X^3 - X + 1$; d) $X + 3$; e) $X^2 + X + 1$; f) $X^2 - 2\sqrt{2}X - 1$; g) 1; h) 1; i) 1. **11.** Se aplică teorema 6.2.4. **12.** $A = n$, $B = -2 - n$, **13.** Se arată că c.m.m.d.c. este 1.

§ 7.

1. Se scrie $X^2 - 4X + 3 = (X - 1)(X - 3)$; $a = -4$, $b = 3$. **2.** -1, $2 \pm i\sqrt{2}$.

3. $m = 0$; 0, 2, 4. **4.** $a = -5$, $b = 1$. **5.** $x^2 - x^2 - 4x + 4 = 0$. **6.** $x^5 - 2x^4 - 6x^3 + 20x^2 - 19x + 6 = 0$. **7.** a) $(X - 1)^3(X + 1)^2(X - 4)$; b) $(X - 1)^3(X - 2)$; c) $(X^2 + 1)(X - 1)(X + 3)^2$.

8. Se folosește teorema 6.2.4 și teorema D'Alembert-Gauss. **9.** Se aplică consecința 7.3.4. **11.** A se vedea exercițiul 9. **12.** Dacă $f = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$ atunci $f(f(X)) - f(X) = (a_n f^n - a_n X^n) + (a_{n-1} f^{n-1} - a_{n-1} X^{n-1}) + \ldots + a_1(f - X)$. Se ține cont că $f^k - X^k$ se divide cu $f - X$ oricare ar fi $1 \leqslant k \leqslant n$. **13.** a) Dacă α este o rădăcină a lui $X^2 + X + 1$ avem $\alpha^3 = 1$ și $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$. Dar $(\alpha + 1)^{6n+1} + \alpha^{6n+2} = (-\alpha^2)^{6n+1} + (\alpha^6)^n \alpha^2 = -\alpha^2 + \alpha^2 = 0$. În continuare se aplică teorema 7.2.3. b), d), e) și f) se fac ca exercițiul a). c) $(X + 1)^{3n+2} + X + 2 = (X + 1)^2[(X + 1)^3]^n + X + 2 = (X^2 + 2X + 1)[X(X^2 + 3X + 3) + 1]^n + X + 2 = [(X^2 + 3X + 3) - X - 2][X(X^2 + 3X + 3) + 1]^n + X + 2$. Se dezvoltă apoi paranteza $[X(X^2 + 3X + 3) + 1]^n$ după binomul lui Newton.

14. a) Facem schimbarea de variabilă $x = \dfrac{y - a}{2}$ în ecuația dată. Obținem $\left(\dfrac{y - a}{2}\right)^3 + a\left(\dfrac{y - a}{2}\right)^2 + b\left(\dfrac{y - a}{2}\right) + c = 0$.

b) În ecuația dată se face schimbarea de variabilă $x = 2y$. Ecuația căutată este $8y^3 + 4ay^2 + 2by + c = 0$; c). Din egalitățile $y = x^2$ și $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ eliminăm pe x. Obținem $y(y + b)^2 - (ay + c)^2 = 0$.

15. $m = \pm 48$. **16.** $\lambda = 6$. **17.** $q^3 + pq + q = 0$. **18.** a) $1 \pm \sqrt{3}$, $1 \pm i\sqrt{2}$; b) $1 \pm 2i$, $-2 \pm i$; c) $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, $\frac{-1 \pm \sqrt{11}}{2}$. **19.** $+\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ și $-1, 1, 3$.

20. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = a_1^2 - 2a_2$; $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = a_1^4 - 4a_1^2a_2 + 2a_2^2 - 4a_1a_3$.

23. 3. **24.** $-1, -1, -1, -1, -2$. **25.** 1 are ordinul de multiplicitate 2; -1 are ordinul de multiplicitate 3.

§ 8.

1. a) $\pm 3, \pm 1$; b) $\pm 4, \pm 1$; c) ± 1; $\pm \sqrt[4]{2}$; d) $\pm \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2}$; $\pm \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$; e) $\pm\sqrt{3 + \sqrt{3}}$; $\pm\sqrt{3 - \sqrt{3}}$; f) $\pm \frac{\sqrt{2}}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$; g) $\pm \frac{1}{2}$; $\pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$; h) $\pm i, \pm 1$.

2. a) ± 6; ± 2; b) $\pm\sqrt{5}, \pm 1$; c) ± 1; $\pm \frac{\sqrt{13}}{2}$; d) ± 2; $\pm i\sqrt{12}$.

3. a) $x^4 - 25x^3 + 144 = 0$; b) $x^4 - \frac{5}{18}x^2 + \frac{1}{144} = 0$; c) $x^4 + 13x^2 + 36 = 0$; d) $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$.

4. a) se discută rădăcinile ecuației rezolvente $y^2 - 2(m - 4)y - m^2 = 0$. Ecuația dată are 2 rădăcini reale și 2 complexe; b) Dacă $-12 < m < \infty$ ecuația are 4 rădăcini complexe; dacă $m \leqslant -12$ ecuația are 4 rădăcini reale; c) dacă $m > 0$ ecuația are 4 rădăcini complexe; dacă $m < 0$ ecuația are 2 rădăcini reale și 2 complxe; d) ecuația are 4 rădăcini reale oricare ar fi $m \in \mathbf{R}$; e) are 2 rădăcini reale și 2 complexe; f) Rădăcinile ecuației rezolvente sînt -3 și $\frac{m+1}{2}$. Dacă $m < -1$ ecuația are 4 rădăcini complexe; dacă $m > -1$ ecuația are 2 rădăcini reale și 2 complexe.

5. Se face substituția $x^n = y$. **6.** a) $-1, -5, -\frac{1}{5}$; b) -1; $\frac{-1 \pm i\sqrt{15}}{4}$; c) $1, 5, \frac{1}{5}$; d) $1, \frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{4}$; e) $-1, \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$; f) $-1, \frac{1 \pm i\sqrt{35}}{6}$; g) $-1, \pm i$; h) $-1, \frac{-3 \pm i\sqrt{7}}{4}$. **7.** i) $b = 3a$ sau $b = -a$; ii) $(b - 3a)(a + b) \geqslant 0$; iii) $(b - 3a)(a + b) < 0$. **8.** a) $-2, -\frac{1}{2}, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$; b) $2 \pm i\sqrt{3}, \frac{-5 \pm 2\sqrt{3}}{2}$; c) $1 \pm i\sqrt{3}, \frac{-3 \pm i\sqrt{55}}{16}$; d) $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, $\frac{-3 \pm 2\sqrt{2}}{2}$; e) $-1, -1, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$; f) $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, $-2 \pm \sqrt{3}$; g) $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, $-3 \pm 2\sqrt{2}$.

9. Ecuația rezolventă este $y^2 + 2y + a - 2 = 0$. Se pune condiția ca această ecuație să aibă ambele rădăcini aparținînd intervalului $(-\infty, -2) \cup [2, +\infty)$. **10.** Fie ecuația reciprocă $a_{2p}x^{2p} + a_{2p-1}x^{2p-1} + \ldots + a_1x + a_0 = 0$. O împărțim cu x^p și obținem (1) $a_{2p}x^p + \frac{a_0}{x^p} + a_{2p-1}x^{p-1} + \frac{a_1}{x^{p-1}} + \frac{a_1}{x^{p-1}} + a_{2p-2}x^{p-2} + \frac{a_2}{x^{p-2}} + \ldots = 0$. Facem substituția $x + \frac{1}{x} = y$. După binomul lui Newton avem $y^k = x^k + \frac{1}{x^k} + C_k^1\left(x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}\right) + C_k^1\left(x^{k-2} + \frac{1}{x^{k-2}}\right) + \ldots$.

Dînd valori lui $k = 1, 2, \ldots, p$ se determină $x^k + \frac{1}{x^k}$ în raport cu $y^k, y^{k-1}, y^{k-2}, \ldots$ Ecuația (1) se transformă într-o ecuație de gradul p în nedeterminata y. **11.** a) $-1, \frac{5}{4}, \frac{4}{5}, \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$; $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$, b) $-1, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, c) $-1, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{5}, \frac{2 \pm i\sqrt{21}}{6}$.

§ 9.

1. $f(\pm i) = \pm(b - a)i$. **2.** $a = 57$, $b = -80$, $x_{1,2} = \frac{5 \pm i\sqrt{39}}{2}$, $x_{3,4} = 1 \pm 2i$.

3. Reducere la absurd. Rezultă că toate rădăcinile sînt reale. Dar $(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} x_ix_j \Leftrightarrow (2a + 1)^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + (2a + 2)^2$, absurd. **4.** $f = (X^2 + 1)(X^4 + X^3 + 2X^2 + X + 1) = (X^2 + 1)^2(X^2 + X + 1)$, i și $-i$ rădăcini duble și $x_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. **5.** $f = (X^2 - 2X + 2)(X^2 + X + 1)$ deci $1 \pm i$ și $\frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. **6.** $f = (X^2 - 4X + 5)(X^2 + 1)$, deci $2 \pm i$ și $\pm i$. **7.** Se demonstrează că există $a, b \in \mathbf{R}$ astfel încît $f = (X^2 - 2\cos a X + 1)(X^2 - 2\cos b\, X + 1)$, $\cos a$ și $\cos b$ sînt rădăcinile ecuației $2x^2 - \alpha x - 1 = 0$ adică $\frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 + 8}}{4}$ și ținînd cont că $|\alpha| < 1$ avem $\sqrt{\alpha^2 + 8} < 3$. Rădăcinile lui f sînt $\cos a \pm i\sin a$ și $\cos b \pm i\sin b$. **8.** $f = X^2(X^3 - 2X + 2) + X(X^2 - 2X + 2) + mX^2 + n$, $m = n = 0$; $1 \pm i$, 0 și -1. **9.** $f = (X^2 - 2X + 2)(3X^2 + X - 1) = 3(X^2 - 2X + 2)\left(X + \frac{1 - \sqrt{13}}{6}\right)\left(X - \frac{1 + \sqrt{13}}{6}\right)$. $1 \pm i, \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{6}$.

10. $f = X^4 + 2X^2 + 1 - X^2 = (X^2 - X + 1)\cdot(X^2 + X + 1)$. **11.** $f = X^4 + 2X^2 + 1 - (\sqrt{2}X)^2 = ((X^2 - \sqrt{2}X + 1)(X^2 + \sqrt{2}X + 1)$.

12. Dacă α este o rădăcină a polinomului $X^2 + X + 1$, atunci cum $X^2 + X + 1 \mid f(X^3) + Xg(X^3)$ avem $f(1) + \alpha g(1) = 0 \Rightarrow f(1) = g(1) = 0$.

13. Se face la fel ca 12. **14.** a) $f = (X - 2)^2(X^2 - 2X + 2)$; b) $f = (X^3 + 1)^2(X^2 - 4X + 5)^2$; c) $f = (X^2 + 2X + 2)^3(X^2 - 1)$. **15.** $\left(\frac{x + i}{x - i}\right)^n = -1 = \cos\pi + i\sin\pi \Rightarrow \frac{x + i}{x - i} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}$ $(0 \leqslant k \leqslant n - 1) \Rightarrow \frac{x}{-1} = \frac{1 + \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + \sin\frac{(2k+1)\pi}{n}}{1 - \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} - i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}} \Rightarrow x = \operatorname{ctg}\frac{(2k+1)}{2n}\pi$.

16. $X^3 + X^2 + X + 1 = (X + 1)(X + i)(X - i)$ și se aplică teorema lui Bézout.

§ 10.

1. $1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2}, -1, 1, \frac{1}{2}$. **2.** $1 \pm \sqrt{3}, \pm i$. **3.** $1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}, 3 - i\ 3 + i, -5$. **4.** $3 - \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. **5.** $\pm\sqrt{2}$, -1 de 3 ori. **6.** a) 2; b) $-2, 3$; c) $-3, -1$ de 4 ori; d) -2 de 3 ori; e) $1, -2, 2, -3, -6$; f) $2, 3, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}$. **7.** Se scrie $f(1) - f\left(\frac{p}{q}\right) = a_1\left(1 - \frac{p}{q}\right) + a_2\left(1 - \frac{p^2}{q^2}\right) + \ldots + a_n\left(1 - \frac{p^n}{q^n}\right) \Rightarrow p - q \mid q^nf(1) \Rightarrow p - q \mid f(1)$.

Bibliografie

1. Colojoară I., Dragomir A., *Elemente de algebră superioară*, manual pentru clasa a XII-a, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1968.
2. Fadeev D., Sominski I., *Culegere de probleme de algebră superioară* (trad. din limba rusă), Editura Tehnică, București, 1954.
3. Kocetkov E. E., Kocetkova E.C., *Algebră și funcții elementare* (în limba rusă), vol. 2, Moscova, 1974.
4. Kolmogorov A. N. ș.a., *Algebră și elemente de analiză* (în limba rusă), manual pentru clasa a 9-a, Moscova, 1977.
5. Novoselov S. I., *Curs special de algebră elementară* (trad. din limba rusă), Editura Tehnică, București, 1955.
6. Stamate I., Stoian I, *Culegere de probleme de algebră*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979.

Elemente de prelucrare automată a datelor

§ 1. Sisteme de calcul

În acest paragraf vom prezenta pe scurt noţiunea de sistem de calcul. Mai precis, ne vom limita doar la acele elemente necesare înţelegerii funcţionării unui astfel de sistem în vederea formării la elevi a deprinderii de a concepe algoritmi şi de a-i reprezenta sub formă de programe ce pot fi executate de către sistemul de calcul.

Reamintim că prin executarea algoritmilor, anumite valori, numite date de intrare, sînt transformate în date de ieşire. De asemenea executarea unui algoritm, după ce a fost elaborat, este o activitate de rutină, fără caracter creator. În dorinţa sa de a se elibera de efortul activităţilor de rutină, în folosul activităţii creatoare, omul a inventat sistemele de calcul, care sînt destinate prelucrării automate a datelor.

Un *sistem de calcul* este un ansamblu alcătuit dintr-un *calculator electronic* şi dintr-o *colecţie de programe*. De obicei, prin abuz de limbaj, în loc de termenul sistem de calcul se foloseşte termenul mai scurt „calculator".

Preocupări de automatizare a calculului au existat chiar cu multe secole în urmă. Semnalăm de exemplu *maşina mecanică de calculat* construită de matematicianul şi umanistul francez Blaise Pascal (sec. XVII) la vîrsta de numai 18 ani. Primul calculator cu adevărat performant a fost însă construit în anii 1943—1944. În ţara noastră, primul calculator a fost realizat în 1957. Evoluţia tehnică a calculatoarelor a fost deosebit de spectaculoasă: astăzi există o mare varietate de sisteme de calcul, cunoscute sub numele de calculatoare universale, minicalculatoare şi microcalculatoare.

De un interes larg se bucură aşa numitele *microcalculatoare personale* care, datorită gabaritului mic, preţului accesibil şi simplităţii în exploatare au devenit echipamente de calcul utilizate în domenii foarte diverse: învăţămînt, medicină, producţie etc. În principiu, un microcalculator personal are structura din figura V.1.

Memoria internă este un bloc de circuite electronice, destinat păstrării informaţiilor (programe, date de intrare şi de ieşire etc.). Conceptual, ne putem reprezenta memoria internă ca un ansamblu de celule numerotate cu 0, 1, 2,...

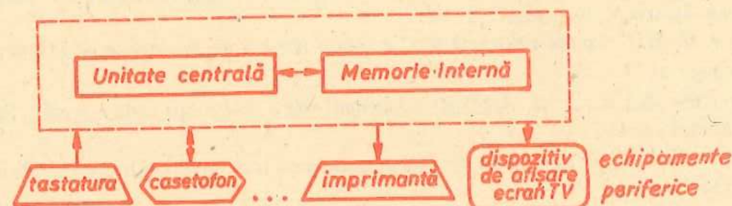


Fig. V.1

Numărul de ordine al unei celule de memorie se numeşte *adresă*. Fiecărei variabile prezente într-un program i se rezervă una sau mai multe celule în care este păstrată valoarea curentă a variabilei; prin *adresa unei variabile* înţelegem adresa primei celule de memorie rezervate ei.

Adresele sînt reprezentate prin numere scrise în baza 2, de lungime fixă. Astfel, pentru calculatoarele HC-85 şi TIM-S adresele din memoria internă sînt reprezentate prin 16 cifre binare; de exemplu adresa 14 este reprezentată prin numărul binar 00 ... 01110. Evident, cea mai mare adresă este o succesiune de 16 cifre egale cu 1, adică numărul $2^{16} - 1$. Prin urmare, memoria internă a acestor calculatoare are cel mult 2^{16} celule.

Pentru numărul $2^{10} = 1\,024$ se utilizează exprimarea Kilo (notată K adică: 1 024 = 1 K). Deci calculatoarele amintite au o memorie internă conţinînd cel mult 64 K celule. Calculatoarele mai puternice au dimensiunea memoriei exprimată în Megacelule (1 M = 1 024 K).

Unitatea centrală efectuează operaţii de prelucrare şi controlează activitatea celorlalte componente ale sistemului de calcul. Funcţionarea sa se bazează pe o combinaţie miniaturizată de circuite electronice, numită *microprocesor*.

Unitatea centrală este alcătuită din *unitatea aritmetică şi logică* şi *unitatea de comandă*. Unitatea aritmetică şi logică realizează operaţiile elementare ale procesului de calcul: adunări, scăderi, înmulţiri, împărţiri, comparări de numere etc. Unitatea de comandă pregăteşte unitatea aritmetică şi logică pentru efectuarea operaţiilor elementare; de exemplu în cazul operaţiilor aritmetice, unitatea de comandă comunică unităţii aritmetice şi logice adresele operanzilor, tipul operaţiei şi adresa unde trebuie memorat rezultatul. De asemenea, unitatea de comandă asigură efectuarea operaţiilor de citire şi scriere, precum şi executarea instrucţiunilor în ordinea cerută prin program.

Prin *echipamentele periferice* se realizează legătura dintre om şi calculator. Astfel prin *tastatură* (un echipament asemănător unei maşini de scris) se introduc în calculator algoritmi sub formă de programe, precum şi date de intrare. Cel mai uzual mod prin care microcalculatorul ne prezintă rezultatele prelucrării (datele de ieşire) este afişarea lor pe un ecran de televizor; ele pot fi de asemenea scrise şi pe hîrtie, dacă dispunem de un dispozitiv numit *imprimantă*. *Caseta magnetică* este folosită pentru a memora programe şi date, în vederea utilizării lor ulterioare.

După capacitatea memoriei, puterea de calcul a microprocesorului şi după clasa de aplicaţii pentru care sînt destinate, distingem următoarele tipuri de microcalculatoare:

1) *personale*, cu memorie între 16 K şi 64 K (Sinclair-Spectrum, Commodore-64, şi calculatoarele româneşti HC-85, TIM-S, COBRA etc.);

2) *semiprofesionale*, cu memorie de aproximativ 128 K (Apple-2);

3) *profesionale*, cu memorie pînă la 1 M sau chiar mai mult (IBM-PC).

Două microcalculatoare de tipuri diferite, care au proprietatea că programele concepute pentru a fi executate de unul dintre ele pot fi executate şi de celălalt, obţinîndu-se aceleaşi rezultate, se numesc *compatibile între ele*; de exemplu calculatoarele româneşti HC-85 şi TIM-S sînt compatibile cu calculatorul Sinclair-Spectrum.

Cealaltă componentă a unui sistem de calcul — *colecţia de programe* — este indispensabilă pentru funcţionarea sistemului. Aceasta conţine o serie de programe specializate ce alcătuiesc aşa numitul *sistem de operare*, care ajută pe utilizator la punerea la punct a propriilor sale programe şi supraveghează executarea acestora de către calculator, simplificîndu-se astfel activitatea de programare.

Un rol important îl au programele numite *compilatoare* și cele numite *interpretoare*, care controlează corectitudinea programelor prezentate pentru execuție și le transpun într-o formă acceptată de unitatea centrală.

În afară de sistemul de operare, colecția menționată mai conține programe pentru rezolvarea unor probleme frecvent întîlnite cum ar fi: calculul valorilor unor funcții, rezolvarea unor ecuații și sisteme de ecuații etc. Acestea pot fi astfel folosite direct, scurtîndu-se în consecință efortul și timpul de programare.

§ 2. Elemente de programare în limbajul BASIC

2.1. Reprezentarea algoritmilor (recapitulare)

În clasa a IX-a algoritmii au fost prezentați sub formă de scheme logice și sub formă de programe într-un limbaj algoritmic.

Ne vom mărgini în acest paragraf la a reaminti forma instrucțiunilor și la prezentarea unui nou exemplu.

Instrucțiunile ce pot apare într-o schemă logică sînt cele din figura V.2.

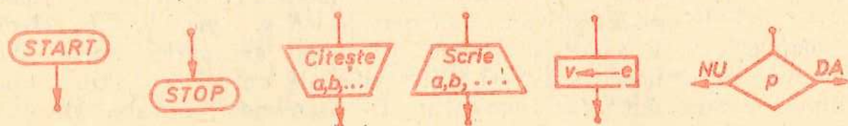


Fig. V.2

Instrucțiunile limbajului algoritmic au următoarea formă:

1) **citește** *a*1, ..., *an*
2) **scrie** *a*1, ..., *an*
3) $v \leftarrow e$
4) **stop**
5) ⌐**dacă** *p* **atunci** S_1
   altfel S_2
   └□
6) ⌐**dacă** *p* **atunci** *S*
   └□
7) ⌐**cît timp** *p*
   S
   └□
8) ⌐**pentru** $v = a, b, r$
   S
   └□

Exemplu. Să se scrie un algoritm care pentru orice $x > 0$ calculează valoarea $n = [\sqrt{x}]$.

Știm că $n = [\sqrt{x}]$ dacă și numai dacă $n \leqslant \sqrt{x} < n + 1$, ceea ce este echivalent cu $n^2 \leqslant x < (n + 1)^2$. În concluzie n este cel mai mic număr natural cu proprietatea $x < (n + 1)^2$. Algoritmul pe care îl prezentăm calculează succesiv pătratele numerelor naturale și se oprește cînd se depășește valoarea x.

Vom folosi trei variabile și anume $n2$, *impar* și n, unde valoarea lui $n2$ va fi n^2, iar valoarea lui *impar* va fi $2n + 1$. Deci tripletul ($n2$, *impar*, n) va lua succesiv valorile:

$$(0, 1, 0), (1, 3, 1), (4, 5, 2), \ldots$$

Trecerea de la un triplet la altul se face conform instrucțiunilor:

$n2 \leftarrow n2 + impar$ /* deoarece $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$ */

$impar \leftarrow impar + 2$

$n \leftarrow n + 1$

Putem acum reprezenta algoritmul în cele două modalități cunoscute:

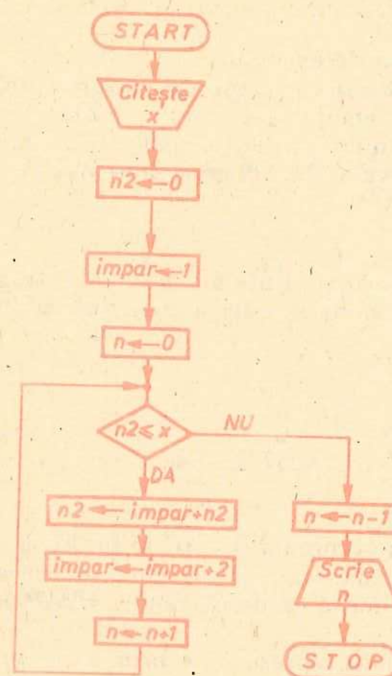


Fig. V.3

citește x

$n2 \leftarrow 0$; $impar \leftarrow 1$; $n \leftarrow 0$

/* s-a inițializat tripletul */

/* ($n2$, *impar*, n) */

⌐**cît timp** $n2 \leqslant x$
   $n2 \leftarrow n2 + impar$
   $impar \leftarrow impar + 2$; $n \leftarrow n+1$
└□

$n \leftarrow n - 1$; **scrie** n

stop

Remarcăm că prin acest algoritm se calculează valoarea $[\sqrt{x}]$ utilizînd doar adunări și comparări.

Pentru $x = 23{,}1$ valorile succesive ale variabilelor sînt:

x	n^2	*impar*	n
23,1	0	1	0
23,1	1	3	1
23,1	4	5	2
23,1	9	7	3
23,1	16	9	4
23,1	25	11	5
23,1			4

2.2. Limbajul BASIC: expresii; structura unui program

În prezent există un mare număr de limbaje de programare. Printre cele mai răspîndite se numără următoarele: PASCAL, FORTRAN, COBOL, BASIC etc.

Limbajul BASIC este un limbaj de programare ușor de învățat și care poate fi folosit pe majoritatea tipurilor de calculatoare, îndeosebi pe microcalculatoarele personale. Pînă în prezent s-au realizat mai multe variante ale acestui limbaj (prima în anii 1964—1965).

Vom prezenta în continuare, *în formă simplificată*, acele elemente ale limbajului BASIC suficiente pentru reprezentarea algoritmilor din acest manual.

În limbajul BASIC, datele cu care se lucrează se împart în date numerice (reale) și date de tip șir de caractere.

Constantele numerice au una dintre formele:

1) număr natural în scrierea obișnuită, ca de exemplu: 43 0 51;

2) număr întreg, care este fie un număr natural, fie un număr natural precedat de unul dintre semnele "+" sau "−", ca de exemplu: −1 42 +20;

3) număr real, care este format dintr-un număr întreg urmat de "." și apoi de un număr natural; punctul corespunde virgulei din scrierea matematică (zecimală).

Exemple: − 43.51 + 2.76 .

4) număr real cu exponent, care este format dintr-un număr întreg sau real (numit *mantisă*), urmat de litera "E" și apoi de un număr întreg (numit *exponent*). Valoarea numărului este:

$$mantisă \times 10^{exponent}.$$

De *exemplu* următoarele constante:

42.576 0.42576E+2 42576E−3

desemnează aceeași valoare și anume 42,576.

Convenim ca toate literele care apar într-un program BASIC să fie litere mari.

Constantele de tip șir de caractere constau dintr-o secvență de caractere (litere, cifre, operatori etc.) cuprinsă între ghilimele, ca de exemplu "*INFORMATICA*".

Ca și în limbajul algoritmic, variabilele sînt reprezentate prin succesiuni de litere și cifre ce încep cu o literă.

Exemple: *N*2, *IMPAR*, *N*, *X*1, *X*2.

Dacă dorim ca o variabilă să ia valori șiruri de caractere, atunci numele ei (format dintr-o singură literă!) apare în program urmat de caracterul "$". În acest caz spunem că variabila respectivă este de tip șir de caractere. *Exemple*: *A$*, *T$*.

Operatorii aritmetici sînt următorii:

+ − * / ↑

corespunzători în ordine adunării, scăderii, înmulțirii, împărțirii și ridicării la putere.

Folosind variabile, constante numerice, operatori aritmetici și paranteze rotunde, se pot forma *expresii aritmetice*, ca și în scrierea matematică uzuală. Evaluarea lor se face, de asemenea, în modul obișnuit, adică se fac întîi ridicările la putere, apoi înmulțirile și împărțirile, iar la urmă adunările și scăderile; bineînțeles, parantezele pot modifica această ordine.

Exemple. Următoarele expresii aritmetice în scrierea obișnuită:

$(a+b):c$ a^{b^c} $\frac{a}{b \cdot c}$ $\frac{a}{b \cdot c}$ $(3x-4)^3(x-4y)$ a^{-x}

pot fi scrise în limbajul BASIC astfel:

(*A* + *B*)/*C* *A* ↑ (*B* ↑ *C*) *A*/*B*/*C* *A*/(*B***C*) (3**X* − 4) ↑ 3*(*X* − 4**Y*) *A* ↑ (−*X*)

Se observă că, spre deosebire de notația matematică, numărătorul și numitorul unei fracții, precum și baza și exponentul unei puteri se scriu pe același rînd.

Plecînd de la variabile și constante de tip șir de caractere putem, de asemenea, forma *expresii de tip șir de caractere*, folosind operatorul "+", al cărui efect este alăturarea celor două șiruri. De exemplu expresia "*AR*" + "*C*" are valoarea "*ARC*", iar expresia "*C*" + "*AR*" are valoarea "*CAR*" (se remarcă faptul că pentru șiruri operatorul "+" nu mai este comutativ).

Plecînd de la două expresii aritmetice, se poate obține o *expresie logică simplă* prin compararea lor. Aceasta se realizează folosind următorii operatori relaționali:

= <> < > <= >=

corespunzători următoarelor relații matematice

$=$ $\neq$ $<$ $>$ $\leqslant$ $\geqslant$

Este subînțeles faptul că întîi se evaluează expresiile aritmetice și apoi se face compararea lor. Rezultatul comparării este 1 (corespunzător adevărului) sau 0 (corespunzător falsului).

Exemple. Dacă variabilele *X*, *Y*, *Z* au respectiv valorile 1, 2, 3, atunci valorile expresiilor logice simple

X < = *Y* − *Z* *X***Y* ↑ *Z* <> 7 *A* − *A* = *B* − *B*

sînt respectiv 0, 1, 1.

Trebuie remarcat că putem forma expresii logice simple și prin compararea șirurilor de caractere. Specificăm doar că pentru două șiruri de litere x și y, spunem că $x < y$ dacă x ar apare în dicționar înaintea lui y.

Exemple. Expresiile "*AB*" < "*ABC*", "*MAC*" < "*MAL*", "*MAMA*" < = "*MAR*" și "*MA*" = "*MA*" au valoarea 1 (adevărat), pe cînd expresiile "*X*" < = "*A*", "*X*" = "*XA*" au valoarea 0 (fals).

Pornind de la expresii logice simple putem forma *expresii logice* folosind operatorii logici:

AND *OR* *NOT*[1]

corespunzători în ordine conjuncției (∧), disjuncției (∨) și negației (¬) din logica matematică.

Astfel (*X* < 1) *AND* (*A* + *B* <> 3) este o expresie logică formată prin folosirea conjuncției între expresiile logice simple *X* < 1 și *A* + *B* <> 3; de asemenea, *NOT*(*A* < = *X*) este o expresie logică. Din expresiile logice anterioare putem forma alte expresii logice, ca de exemplu ((*X* < 1)*AND*(*A* + *B* <> 3))*OR*(*NOT*(*A* < = *X*) etc.

Ca și în cazul expresiilor aritmetice, se pune problema priorității de execuție a operațiilor.

Operatorii logici au cea mai mică prioritate, adică intră în acțiune la evaluarea unei expresii logice numai după ce au fost evaluate expresiile logice simple din componența ei. Operatorul *NOT* are cea mai mare prioritate și este urmat în ordinea descrescătoare a priorităților de *AND* și *OR*. Cu alte cuvinte, întîi se efectuează negațiile, apoi conjuncțiile și apoi disjuncțiile; la fel ca în cazul expresiilor aritmetice, utilizarea parantezelor rotunde permite modificarea acestei ordini.

Exemplu. Fie expresia logică:

A = *B AND B* = *C OR X* = *Y AND Y* = *Z*.

După calculul valorilor expresiilor logice simple *A* = *B*, *B* = *C*, *X* = *Y*, *Y* = *Z*, se execută cele două conjuncții și apoi disjuncția lor. Este util, mai ales la început, să înlocuim expresia logică de mai sus cu următoarea:

(*A* = *B AND B* = *C*) *OR* (*X* = *Y AND Y* = *Z*).

utilizarea parantezelor (deși inutilă din punctul de vedere al limbajului BASIC) aducînd un plus de claritate.

Un program BASIC este o secvență de *linii de program*. O linie de program se poate scrie pe una sau mai multe linii ale ecranului; sfîrșitul ei se realizează printr-o comandă specială. O linie de program este formată dintr-o *etichetă* (care

[1] *AND* = și; *OR* = sau; *NOT* = nu

este un număr natural) urmată de una sau mai multe *instrucțiuni* separate între ele prin ":". Etichetele liniilor de program trebuie să apară în ordine crescătoare. Ordinea normală de executare a instrucțiunilor este cea secvențială; excepțiile de la această regulă vor fi precizate la descrierea instrucțiunilor ce o încalcă.

Anumite succesiuni de litere ce apar într-un program BASIC se numesc *cuvinte cheie*. Am întîlnit deja 3 cuvinte cheie și anume *NOT*, *AND*, *OR*, care identifică operatorii logici.

2.3. Cîteva instrucțiuni ale limbajului BASIC. Funcții BASIC

Instrucțiunile limbajului BASIC sînt identificate prin cuvinte cheie ce apar în componența lor. Cuvintele cheie sînt cuvinte în limba engleză; semnificația (traducerea) lor va fi prezentată la prima lor apariție.

Instrucțiunea de scriere are una din formele:

1) PRINT lista[1]
2) PRINT lista;
3) PRINT, lista,

unde *lista* este formată din expresii aritmetice, logice sau de tip șir de caractere, despărțite între ele prin punct și virgulă, virgulă sau apostrof.

Valoarea unei expresii este scrisă astfel:

a) în continuarea valorii expresiei anterioare, dacă a fost despărțită de aceasta prin punct și virgulă;

b) la mijlocul liniei curente (dacă acesta n-a fost depășit) sau de la începutul liniei următoare (în caz contrar), dacă a fost despărțită prin virgulă;

c) la începutul liniei următoare, dacă a fost despărțită prin apostrof.

Prima expresie dintr-o listă se scrie ca în cazul a) dacă ultima instrucțiune de scriere executată a avut forma 2), ca în cazul b) dacă aceasta a avut forma 3) și ca în cazul c) dacă aceasta a avut forma 1).

Reamintim că valoarea unei expresii logice este 0 sau 1; deci cînd o expresie logică apare într-o instrucțiune PRINT, va fi scrisă una dintre aceste valori.

Exemplu. Prin executarea următorului program BASIC:

```
10 PRINT "INCE"; "PUT"
20 PRINT "A"<"B", "A"< = "AB"
30 PRINT 1=2—1, 3<4
40 PRINT "SFÎRȘIT";
50 PRINT "UL PROGRAMULUI"
```

pe ecran va apare:

```
ÎNCEPUT
1                    1
1                    1
SFÎRȘITUL PROGRAMULUI
```

Instrucțiunea de citire are forma:

INPUT listă[2]

unde *lista* este formată din variabile despărțite între ele prin virgulă. Aceste variabile vor primi pe rînd valorile constantelor numerice sau de tip șir de caractere pe care le introducem prin intermediul tastaturii, în timpul execuție programului.

---

[1] **PRINT** = tipărește
[2] **INPUT** = intrare

Instrucțiunea STOP are forma:

STOP

și determină oprirea execuției programului.

Exemplu. Considerăm următorul program BASIC:

```
10 INPUT X,Y
20 PRINT "X="; X, "Y="; Y' "SUMA="; X+Y
30 STOP
```

Dacă prin tastatură introducem valorile 3 și 7, atunci pe ecran vor apare scrise următoarele două linii:

```
X=3                  Y=7
SUMA=10
```

Instrucțiunea de atribuire are una dintre formele:

LET variabilă = expresie-aritmetică[1]
LET variabilă = expresie-de-tip-șir-de-caractere

Execuția ei constă, la fel ca în cazul schemelor logice și a limbajului algoritmic, în evaluarea expresiei din dreapta semnului „=“ și atribuirea acestei valori variabilei ce apare în stînga.

Exemple. Instrucțiunea LET X=X+1 este analoagă instrucțiunii $X \leftarrow X + 1$ din limbajul algoritmic, iar după executarea instrucțiunii

LET S$ = "AFARA PLOUA" : LET S$ = S$ + "?"

variabila S$ va avea valoarea "AFARA PLOUA?"

Instrucțiunea comentariu are forma:

REM șir-de-caractere[2]

și este ignorată la execuție, ea avînd doar rolul de a introduce un comentariu prin care sînt explicate prelucrările efectuate prin program.

Limbajul BASIC pune la dispoziția utilizatorului un număr de *funcții* BASIC, dintre care ne vor interesa cele ce corespund unor *funcții matematice* des utilizate în practică.

Ne vom limita la funcții avînd un singur argument. Numele f al unei funcții BASIC, urmat de o expresie aritmetică e cuprinsă între paranteze, poate apare într-o altă expresie aritmetică E, în locul unei variabile. Mai întîi se evaluează expresia e, apoi se calculează valoarea $f(e)$ iar rezultatul se utilizează în evaluarea expresiei E.

Prezentăm în continuare lista unor funcții BASIC și semnificația lor:

ABS(x) = $|x|$; INT(x) = $[x]$; SQR(x) = $\sqrt{x}$; EXP(x) = e^x
LN(x) = $\ln x$; SIN(x) = $\sin x$; COS(x) = $\cos x$; TAN(x) = $\operatorname{tg} x$
ASN(x) = $\arcsin x$; ACS(x) = $\arccos x$; ATN(x) = $\operatorname{arctg} x$

cu următoarele observații:

— pentru funcțiile trigonometrice arcele se dau și se obțin în radiani;

— dacă se încearcă aplicarea unei funcții pentru o valoare ce nu face parte din domeniul său de definiție, va fi semnalată eroarea respectivă.

---

[1] **LET** = fie;
[2] **REM** = prescurtarea de la **REMARK** (observație)

Putem acum să exprimăm în BASIC expresii aritmetice mai complexe. Astfel, expresiile $\cos x^2 + \sqrt{x}$ şi ln ln x se reprezintă în limbajul BASIC prin COS (X ↑ 2)+SQR(X), respectiv LN(LN(X)).

Exemplul 1. Pentru calculul valorii $n = [\sqrt{x}]$, unde $x \geqslant 0$, se poate scrie următorul program BASIC ce foloseşte funcţiile INT şi SQR:

```
10 INPUT X
20 LET N=SQR(X): LET N=INT(N)
30 PRINT "N ="; N
40 STOP
```

Exemplul 2. Fiind date lungimile laturilor unui triunghi ABC, să se calculeze măsura unghiului $\widehat{BAC}$ (în grade), lungimea medianei ce pleacă din vîrful A, aria triunghiului şi raza cercului circumscris.

Vom folosi următoarele formule cunoscute:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \qquad m_A^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4};$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; \qquad R = \frac{abc}{4S}.$$

```
10 REM AB,AC,BC SINT LUNGIMILE LATURILOR
20 INPUT AB,AC,BC
30 REM A ESTE UNGHIUL BAC
40 LET X =(AC ↑ 2+AB ↑ 2—BC ↑ 2)/(2*AC*AB)
50 LET A=ACS(X)
60 REM SE EXPRIMA A IN GRADE
70 LET A = A/3.14159*180
80 PRINT "UNGHIUL A ESTE:"; A
90 REM MA ESTE LUNGIMEA MEDIANEI DIN VÎRFUL A
100 LET MA = (2*(AB ↑ 2+AC ↑ 2)—BC ↑ 2)/4
110 LET MA=SQR (MA)
120 PRINT "MEDIANA DIN VÎRFUL A ARE LUNGIMEA=";MA
130 REM S ESTE ARIA TRIUNGHIULUI
140 LET P=(AB+AC+BC)/2
150 LET S=P*(P—AB)*(P—AC)*(P—BC)
160 LET S=SQR(S)
170 PRINT "ARIA=";S
180 REM R ESTE RAZA CERCULUI CIRCUMSCRIS
190 LET R = AB*AC*BC/4/S
200 PRINT "R=";R
210 STOP
```

2.4. Instrucţiunile de decizie şi transfer necondiţionat

Instrucţiunea de transfer are forma:

GO TO e[1)]

unde e este eticheta unei linii de program. Executarea instrucţiunii determină un transfer necondiţionat la prima instrucţiune de pe linia cu eticheta respectivă, aceasta fiind instrucţiunea cu care continuă executarea programului.

[1)] GO TO = treci la

Instrucţiunea de decizie are forma:

IF expresie logică THEN instrucţiune[1)]

Efectul ei este următorul: dacă valoarea expresiei logice este 1, se execută instrucţiunea ce urmează lui THEN, apoi (exceptînd cazul cînd aceasta este o instrucţiune de transfer) instrucţiunea următoare; dacă valoarea expresiei logice este 0, se trece direct la executarea instrucţiunii următoare.

Prezentăm în continuare modul în care vom transcrie în limbajul BASIC instrucţiunea de ramificare din limbajul algoritmic (a, b, c, d vor desemna etichete).

Limbaj algoritmic	BASIC
—**dacă** p **atunci** S_1	a IF NOT p THEN GO TO c
altfel S_2	S_1
	b GO TO d
—□	c REM CONDIŢIA P NU ESTE ÎNDEPLINITĂ
	S_2
	d REM S-A ÎNCHEIAT INSTRUCŢIUNEA IF

Limbaj algoritmic	BASIC
—**dacă** p **atunci** S	a IF NOT p THEN GO TO b
	S
—□	b REM S-A ÎNCHEIAT INSTRUCŢIUNEA IF

În cazul al doilea, dacă S este o instrucţiune de atribuire, o instrucţiune de intrare sau ieşire, o instrucţiune STOP sau o instrucţiune de transfer, atunci corespondentul din limbajul BASIC este instrucţiunea: IF p THEN S.

Trecem acum la transpunerea instrucţiunii repetitive a limbajului algoritmic într-o secvenţă de instrucţiuni BASIC:

Limbaj algoritmic	BASIC
—**cît timp** p	a IF NOT p THEN GO TO b
S	S
	c GO TO a
—□	b REM SFÎRŞIT CÎT TIMP

Exemplul 1. Programul BASIC care urmează calculează numărul de apariţii ale literei "A" într-o succesiune de caractere introduse cîte unul prin tastatură; succesiunea se consideră încheiată prin caracterul ".".

```
10 LET NR=0
20 INPUT L$
30 IF L$ ="." THEN GO TO 70
40 IF L$="A" THEN LET NR=NR+1
60 GO TO 20
70 PRINT NR
80 STOP
```

Exemplul 2. Fiind dat un număr natural $p > 1$, să se determine dacă el este prim.

Ştim că un număr natural $p > 2$ este prim dacă singurii săi divizori naturali sînt 1 şi p. Să observăm că p are un divizor diferit de 1 şi p dacă şi numai dacă are un divizor d cu $2 \leqslant d \leqslant [\sqrt{p}]$. Va fi deci suficient ca variabila d să ia valoarea 2 şi apoi valorile impare 3, 5, 7, ..., fără a-l depăşi pe $[\sqrt{p}]$. Ţinînd cont că pentru două numere naturale a, b, cu $b \neq 0$ avem: $b \mid a \Leftrightarrow a = \left[\frac{a}{b}\right] \cdot b$, putem scrie acum programul în limbajul algoritmic şi corespondentul său în BASIC.

[1)] IF = dacă; THEN = atunci

```
citeşte p
—dacă p = 2 atunci scrie 'DA'
|                  stop
—□
m ← [p/2]
—dacă p = 2m atunci scrie 'NU'
|                  stop
—□
r ← [√p];  d ← 3
—cît timp d ≤ r
|  m ← [p/d]
|  —dacă p = m · d atunci scrie 'NU'
|  |                  stop
|  —□
|  d ← d + 2
—□
scrie 'DA'; stop
```

```
10 INPUT P
20 IF P>2 THEN GO TO 40
30 PRINT "DA": STOP
40 LET M=INT (P/2)
50 IF P<>2*M THEN GO TO 70
60   PRINT "NU": STOP
70 LET R=SQR(P): LET R=INT (R)
80 LET D=3
90 IF D>R THEN GO TO 150
100  LET M=INT(P/D)
110  IF P<>M*D THEN GO TO 130
120     PRINT "NU": STOP
130  LET D=D+2
140 GO TO 90
150 PRINT "DA": STOP
```

2.5. Vectori. Alte instrucţiuni BASIC

Toate variabilele cu care am lucrat pînă acum se numesc *variabile simple*. Introducem în acest paragraf un tip mai complex de variabile numite *vectori*.

Fie E o mulţime şi $n > 0$ un număr natural. Vom înţelege prin *vector de lungime n cu valori în mulţimea E* o succesiune de n elemente ale lui E într-o ordine bine stabilită. Notînd cu $a_1, a_2, \ldots, a_n$ respectiv primul, al doilea, ..., al n-lea element al succesiunii în ordinea considerată, vom folosi scrierea $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ pentru un vector de lungime n.

Exemple.

1) Dacă $E = \{0, 1\}$, vectorii de lungime 2 cu valori în E sînt următorii: (0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1).

2) Un număr complex $x + yi$ poate fi privit ca un vector (a_1, a_2) de lungime 2 cu valori reale, unde $a_1 = x, a_2 = y$.

3) Ecuaţia $a_1x^2 + a_2x + a_3 = 0$ este bine determinată de vectorul (a_1, a_2, a_3).

Noţiunea de vector în plan, în fizica revine la un vector (a_1, a_2) unde $a_1 \geqslant 0$ este mărimea (modulul) vectorului, iar $a \in [0, 2\pi)$ este unghiul ce sintetizează direcţia şi sensul.

Să remarcăm deosebirea dintre vectori şi mulţimi. În primul rînd ordinea în care apar elementele într-un vector este esenţială, în schimb ea nu este relevantă atunci cînd specificăm elementele unei mulţimi. În al doilea rînd elementele unui vector nu sînt neapărat distincte, pe cînd într-o mulţime fiecare element este specificat o singură dată; astfel vectorul (0, 0, 0) are lungimea 3, în timp ce mulţimea $\{0\} \cup \{0\} \cup \{0\} = \{0\}$ are un singur element.

Menţionăm că uneori numerotarea elementelor unui vector începe cu 0; $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ este un vector cu $n + 1$ elemente. Referirea la un element al unui vector se face cu ajutorul unui *indice* care desemnează numărul său de ordine în cadrul vectorului; indicele este o expresie algebrică a cărei valoare trebuie să fie unul dintre numerele 1, 2, ..., n (respectiv unul dintre numerele 0, 1, 2, ..., n dacă numerotarea începe cu 0).

Atît în schemele logice cît şi în limbajul algoritmic, un vector este interpretat ca o succesiune de variabile simple, numite *variabile indexate* deoarece ele se identifică prin numele vectorului şi printr-un indice; o variabilă indexată poate apare în locul unei variabile simple. Se admite ca în instrucţiunile de citire şi scriere să apară numele unui vector fără indici, semnificînd citirea, respectiv scrierea tuturor elementelor vectorului.

Exemplu. Fiind dat un vector $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, atunci:

— dacă valorile curente ale variabilelor x şi y sînt 3 şi 5, atunci variabila indexată a_{x+y} desemnează al 8-lea element al vectorului; semnificaţia instrucţiunii $a_{x+y} \leftarrow 2x - y$ este următoarea: valoarea curentă a celui de al 8-lea element al vectorului devine 1;

— efectul instrucţiunii: **scrie** a constă în scrierea tuturor celor 9 componente (elemente) ale vectorului.

În limbajul BASIC, lucrul cu vectori este supus unor reguli mai stricte prezentate în continuare.

Instrucţiunea de dimensionare. Vom da pentru această instrucţiune o formă particulară, menită doar de a permite lucrul cu vectori în limbajul BASIC. Această formă este:

DIM *v*(*e*)

unde v este numele (format dintr-o singură literă) a unui vector a cărui lungime este egală cu valoarea n a expresiei numerice e; această valoare trebuie să fie un număr natural strict pozitiv. În urma executării acestei instrucţiuni se rezervă în memoria internă n locaţii succesive de memorie pentru cele n componente ale vectorului (numerotarea elementelor se face începînd cu 1).

Exemplu. Considerăm următoarele două instrucţiuni BASIC:

...INPUT N: DIM A(N+1)

Dacă în urma citirii variabila N ia valoarea 5, atunci prin instrucţiunea de dimensionare ia naştere un vector cu 6 elemente.

Trebuie prevăzut prin program ca orice instrucţiune de dimensionare DIM V(N), referitoare la un vector V să fie executată înainte de orice altă instrucţiune în care apare numele vectorului. Acest nume nu poate apărea în program decît însoţit de un indice i, sub forma V(i), unde i este o expresie numerică a cărei valoare poate fi unul dintre numerele 1, 2, ..., N. În expresii, în instrucţiunile de atribuire şi în cele de intrare sau de ieşire, în locul variabilelor simple se pot folosi variabile indexate.

Pentru executarea repetată a unei secvenţe de instrucţiuni, limbajul BASIC pune la dispoziţie şi *instrucţiunile* FOR şi NEXT, care au formele:

FOR *v*=*a* TO *b* STEP *r*[1)]
NEXT *v*[2)]

unde v este o variabilă numerică al cărui nume este format dintr-o singură literă, iar a, b, r sînt expresii numerice. Aceste instrucţiuni se folosesc pentru executarea repetată a unei secvenţe S de linii program în contextul următor:

```
FOR v=a TO b STEP r
  S
NEXT v
```

Pentru simplificare, impunem ca în S să nu fie modificată valoarea lui v. Atunci efectul instrucţiunilor de mai sus este acelaşi cu al următoarei instrucţiuni din limbajul algoritmic:

```
—pentru v = a, b, r
|     S
—□
```

1) FOR = pentru; STEP = pas;
2) NEXT = următorul

Observație. În limbajul algoritmic nu apare explicit restricția ca în S să nu se modifice valoarea variabilei v, deoarece a, b și r sînt calculate doar o singură dată și anume la început.

Dacă în secvența de linii de program S apare o instrucțiune FOR, atunci instrucțiunea corespunzătoare NEXT trebuie să apară de asemenea în S.

Pentru instrucțiunea FOR se admite și varianta:

FOR v=a TO b, echivalentă cu:
FOR v=a TO b STEP 1

Exemplul 1. Programul următor calculează mediile a 10 elevi. Pentru fiecare elev sînt citite pe rînd numele său și notele la 5 materii, după care este afișat numele elevului urmat de medie.

```
10 FOR E=1 TO 10
20     INPUT N$
30     LET SUMA=0
40     FOR M=1 TO 5
50         INPUT NOTA: LET SUMA=SUMA+NOTA
60     NEXT M
70     PRINT "MEDIA LUI "; N$;" ESTE "; SUMA/5
80 NEXT E
90 STOP
```

Exemplul 2. Fiind date două mulțimi finite, să se calculeze reuniunea lor.

Începem prin a descrie două modalități de reprezentare a mulțimilor finite.

O primă modalitate de reprezentare a mulțimii $A = \{a_1, ..., a_n\}$ constă în a utiliza un vector $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ ale cărei componente sînt exact elementele mulțimii. O a doua modalitate este aplicabilă situației (des întîlnite) în care toate mulțimile cu care se lucrează sînt submulțimi ale unei *mulțimi totale* $T = \{t_1, ..., t_n\}$. Atunci o submulțime $A \subset T$ este bine determinată de vectorul a de lungime n definit prin:

$$a_i = \begin{cases} 1 & , \text{ dacă } t_i \in A \\ 0 & , \text{ dacă } t_i \notin A \end{cases} \quad , \forall i = 1, 2, ..., n$$

și numit *vectorul caracteristic* al submulțimii A.

Revenind la exemplul considerat, vom presupune că mulțimile A și B sînt submulțimi ale mulțimii totale $T = \{t_1, ..., t_n\}$ și sînt date prin vectorii caracteristici a și b. Atunci elementele reuniunii lor $A \cup B$ se calculează astfel:

```
citește a, b, t
┌pentru i = 1, n, 1
│ ┌dacă a_i + b_i ≠ 0
│ │ atunci scrie t_i
│ └□
└□
stop
```

```
10 INPUT N
20 DIM A(N): DIM B(N): DIM T(N)
30 FOR I=1 TO N
40     INPUT A (I)
50 NEXT I
60 FOR I=1 TO N
70     INPUT B(I)
80 NEXT I
90 FOR I=1 TO N
100    INPUT T(I)
110 NEXT I
120 FOR I=1 TO N
130 IF A(I)+B (I) <> 0 THEN PRINT T(I)
140 NEXT I: STOP
```


Exemple

1) *Calculul valorii* P_n (referitor la cap II, § 2).

Valoarea $P_n = n!$ va fi calculată în variabila *pn*.

```
citește n
pn ← 1
┌pentru i = 1, n, 1
│   pn ← pn · i
└□
scrie pn
stop
```

```
10 INPUT N
20 LET PN=1
30 FOR I=1 TO N
40     LET PN=PN*I
50 NEXT I
60 PRINT PN
70 STOP
```

2) *Calculul valorii* A_n^k (referitor la cap. II, § 2).

Pentru n, k naturale cu $n \geqslant k$ și $n \geqslant 1$, vom calcula valoarea A_n^k în variabila *ank*.

```
citește n, k
ank ← 1
┌pentru i = n, n − k + 1, −1
│   ank ← ank · i
└□
scrie ank
stop
```

```
10 INPUT N,K
20 LET ANK=1
30 FOR I=N TO N—K+1 STEP —1
40     LET ANK=ANK*I
50 NEXT I
60 PRINT ANK
70 STOP
```

3) *Calculul valorii* C_n^k (referitor la cap. II, § 2).

Pentru n, k naturale cu $n \geqslant k$ și $n \geqslant 1$, vom calcula valoarea C_n^k în variabila *cnk*. Vom ține cont de formula $C_n^k = C_n^{n-k}$ (care ne asigură că putem ajunge totdeauna în situația $k \leqslant \frac{n}{2}$), precum și de formula $C_n^k = \frac{n}{1} \frac{n-1}{2} \cdots \frac{n-k+1}{k}$.

```
citește n, k
cnk ← 1
┌dacă k > [n/2] atunci k ← n − k
└□
┌pentru i = 1, k, 1
│   cnk ← cnk · (n − i + 1) / i
└□
scrie cnk
stop
```

```
10 INPUT N,K
20 LET CNK=1
30 IF K>INT(N/2) THEN LET K=N—K
40 FOR I=1 TO K
50     LET CNK=CNK*(N—I+1)/I
60 NEXT I
70 PRINT CNK
80 STOP
```

4) *Generarea primilor n termeni ai unei progresii aritmetice* (referitor la cap. II, § 4).

Fiind date $a, r \in \mathbf{R}$ și $n \in \mathbf{N} \setminus \{0\}$, vom scrie primii n termeni ai progresiei aritmetice avînd ca prim termen pe a, iar ca rație pe r.

```
citește a, r, n
scrie a
┌pentru i = 2, n, 1
│   a ← a + r; scrie a
└□
stop
```

```
10 INPUT A,R,N
20 PRINT A
30 FOR I=2 TO N
40     LET A=A+R: PRINT A
50 NEXT I
60 STOP
```

5) *Generarea primilor n termeni ai unei progresii geometrice* (referitor la cap. II, § 4).

Fie a, $q \in \mathbf{R}$, respectiv primul termen și rația unei progresii geometrice. Dacă $a = 0$ sau $q = 0$, atunci vom scrie un mesaj de eroare (într-o progresie geometrică primul termen și rația trebuie să fie nenule); în caz contrar vor fi scriși primii n termeni ai progresiei.

```
citește a, q, n
—dacă a · q = 0
|  atunci scrie 'nu'; stop
|  altfel scrie a
|     —pentru i = 2, n, 1
|     |  a ← a · q; scrie a
|     —□
—□
stop
```

```
10 INPUT A,Q,N
20 IF A*Q<>0 THEN GO TO 40
30    PRINT "NU" ; STOP
40 PRINT A
50 FOR I=2 TO N
60    LET A=A*Q : PRINT A
70 NEXT I
80 STOP
```

6) *Calculul celui mai mare divizor comun pozitiv a două numere întregi conform algoritmului lui Euclid* (referitor la cap. III, § 2).

Pentru a scrie algoritmul ce calculează un cel mai mare divizor comun al numerelor întregi a și b, vom nota cu x și y valorile curente ale deîmpărțitului și împărțitorului din împărțirile succesive ce se efectuează. În acest mod realizăm economie de memorie, nemaifiind necesari vectorii $r = (r_1, r_2, \ldots)$ și $q = (q_1, q_2, \ldots)$ a căror lungime nu este de altfel cunoscută de la început.

Dacă $x = y = 0$, atunci cel mai mare divizor comun va fi 0. În caz contrar, vom inițializa pe x și y cu $|a|$ și $|b|$, deoarece se cere cel mai mare divizor comun pozitiv. Se observă că perechea de variabile (x, y) ia succesiv valorile:

$$(|a|, |b|), (|b|, r_1), (r_1, r_2), \ldots, (r_{n-1}, r_n), (r_n, r_{n+1}),$$

unde $r_n \neq 0$, $r_{n+1} = 0$. Cît timp $y \neq 0$ vom trece la o nouă pereche (x_1, y_1) unde x_1 va primi valoarea lui y, iar y_1 vor fi restul împărțirii lui x la y (bineînțeles, valorile lui x_1 și y_1 vor fi memorate tot în x și y). Cînd $y = 0$, se observă că ultimul rest diferit de 0 este memorat în x; în consecință va fi scrisă valoarea lui x.

În variabilele c și r vom calcula cîtul și restul împărțirii curente.

```
citește a, b
x ← |a|; y ← |b|
—dacă (x = 0) ∧ (y = 0)
|  atunci scrie '0'; stop
—□
—cît timp y ≠ 0
|  c ← [x/y]; r ← x − y · c
|  x ← y; y ← r
—□
scrie x
stop
```

```
10 INPUT A,B
20 LET X=ABS(A)
30 LET Y=ABS(B)
40 IF(X<>0) OR(Y<>O) THEN GO TO 60
50    PRINT "0": STOP
60 IF Y=0 THEN GO TO 110
70    LET C=INT (X/Y)
80    LET R=X—Y*C
90    LET X=Y: LET Y=R
100 GO TO 60
110 PRINT X: STOP
```

7) Descompunerea unui număr natural în factori primi (referitor la cap. III, § 4).

Prezentăm în continuare un algoritm care determină descompunerea unui număr natural $n \geqslant 2$ în produs de numere prime: $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_m^{k_m}$, unde $p_1, p_2, \ldots, p_m$ sînt numere prime distincte, adică se furnizează la ieșire perechile (p_1, k_1), (p_1, k_2), ..., (p_m, k_m).

O primă idee ar consta în a determina numerele prime $p_1, p_2, \ldots, p_m$ care îl divid pe n și de a stabili pentru fiecare p_i cel mai mare număr natural k_i cu $p_i^{k_i} | n$. O metodă mai simplă este descrisă în continuare.

Începem prin a inițializa cu n o variabilă suplimentară x. O altă variabilă p ia mai întîi valoarea 2, apoi succesiv numerele impare 3, 5, ... în ordine crescătoare; distingem cazurile:

— dacă $p | x$, atunci determinăm cel mai mare număr natural k cu $p^k | x$, înlocuim pe x cu x/p^k și scriem perechea de numere (p, k); se trece apoi la următorul p;

— dacă $p \nmid x$, se trece direct la următorul p.

În acest mod sîntem siguri că în momentul în care $p | x$, p este prim.

Algoritmul se oprește cînd valoarea lui x devine egală cu 1.

```
citește n; x ← n; p ← 2
—cît timp x > 1
|  k ← 0
|  —cît timp p | x
|  |  k ← k + 1; x ← [x/p]
|  —□
|  —dacă k > 0 atunci scrie p, k
|  —□
|  —dacă p = 2 atunci p ← 3
|  |          altfel p ← p + 2
|  —□
—□
stop
```

Propunem ca exercițiu scrierea programului BASIC corespunzător.

8) *Calculul valorii unui polinom într-un punct dat* (referitor la cap. IV, § 5).

$$\text{Fie } f = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \ldots + a_1 X + a_0.$$

Vom calcula, conform schemei lui Horner, restul r al împărțirii polinomului f prin binomul $X - c$. Polinomul f poate fi reprezentat printr-un vector cu $n + 1$ componente conținînd coeficienții $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$. Deoarece în limbajul BASIC numerotarea componentelor începe cu 1, vom nota în cele ce urmează coeficienții lui f prin $a_{n+1}, a_n, \ldots, a_1$. Analog, coeficienții cîtului g se vor nota cu $b_n, \ldots, b_1$. Prin urmare, formulele (4) din § 5, capitolul IV devin:

$$\begin{cases} b_n = a_{n+1} \\ b_{n-1} = a_n + c \cdot b_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_1 = a_2 + c \cdot b_2 \\ r = a_1 + c \cdot b_1 \end{cases}$$

Prezentăm în continuare programul în limbajul algoritmic și programul corespunzător în BASIC. Variabila b va lua pe rînd valorile $b_n, b_{n-1}, \ldots, b_1, b_0 = r$, deci în final ea va avea valoarea r căutată.

```
citește n, a, c
b ← a_{n+1}
—pentru i = n, 1, −1
|  b ← a_i + c · b
—□
scrie b
stop
```

```
10 INPUT N
20 DIM A(N+1)
30 FOR I=N+1 TO 1 STEP —1
40    INPUT A(I)
50 NEXT I
60 INPUT C
70 LET B=A(N+1)
80 FOR I=N TO 1 STEP —1
90    LET B=A(I)+C*B
100 NEXT I
110 PRINT B
120 STOP
```

Exerciţii

Să se scrie un program în limbajul algoritmic şi programul BASIC corespunzător pentru următoarele probleme:

1. Determinarea sumei elementelor unui vector.
2. Calculul celui mai mic element al unui vector.
3. Ordonarea crescătoare a valorilor elementelor unui vector, fără a utiliza un vector suplimentar.
4. Fie dată ecuaţia $x^2 - sx + p = 0$. Notăm $S_k = x_1^k + x_2^k$. Să se arate că $S_k = sS_{k-1} - pS_{k-2}$ pentru $k \geqslant 2$ şi să se calculeze S_k pentru s, p, k date.
5. Fiind date numerele naturale $n > m \geqslant 1$, să se determine dacă fracţia $\frac{m}{n}$ este periodică şi în caz afirmativ să se determine perioada sa.
6. Să se simplifice fracţia $\frac{m}{n}$, unde m, n sînt numere naturale pozitive.
7. Fiind dată o funcţie $f : \{a_1, a_2, ..., a_m\} \to \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ să se determine dacă ea este: a) injectivă; b) surjectivă; c) bijectivă.
8. Fiind dat un vector $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ să se înlocuiască fiecare element al său cu media aritmetică a celorlalte $n - 1$ elemente.
9. Fiind date numerele reale $a_1, a_2, ..., a_n$, să se verifice dacă ele sînt: a) în progresie aritmetică; b) în progresie geometrică (referitor la cap. II, § 4).
10. Fiind date numerele naturale a, b, să se determine (a, b) fără a folosi înmulţiri şi împărţiri (referitor la cap. III, § 3). Indicaţie: se poate utiliza de exemplu egalitatea $(a, b) = (a - b, b)$.
11. Să se calculeze cîtul împărţirii unui polinom f la $X - c$ (referitor la cap. IV, § 5).
12. Fiind dat un polinom f şi o rădăcină c a sa, să se determine ordinul ei de multiplicitate (referitor la cap. IV, § 7).
13. Să se calculeze suma a două polinoame (referitor la cap. IV, § 1).
14. Să se verifice dacă o ecuaţie polinomială este reciprocă (referitor la cap. IV, § 9).

Soluţii

1. Fie $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$. Vom calcula în variabila S suma $a_1 + ... + a_n$. Variabila S va lua succesiv valorile:

$$0, a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, ..., a_1 + a_2 + ... + a_n.$$

```
citeşte a
S ← 0
—pentru i = 1, n, 1
|   S ← S + a_i
—□
scrie S
stop
```

```
10 INPUT N
20 DIM A(N)
30 LET S=0
40 FOR I=1 TO N
50     INPUT A(I)
60     LET S=S+A(I)
70 NEXT I
80 PRINT "S=";S
90 STOP
```

2. Fiind dat vectorul $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$, vom calcula în variabila *min* cea mai mică dintre valorile $a_1, a_2, ..., a_n$. Ne bazăm pe egalitatea:

$$\min\{a_1, ..., a_i\} = \min\{\min\{a_1, ..., a_{i-1}\}, a_i\}.$$

În consecinţă iniţializăm variabila *min* cu a_1 şi apoi pentru o variabilă i luînd succesiv valorile 2, 3, ..., n comparăm pe a_i cu *min* şi dacă $a_i < min$, atunci variabila *min* primeşte valoarea a_i.

```
citeşte a
min ← a_1
—pentru i = 2, n, 1
|  —dacă a_i < min atunci min ← a_i
|  |
|  —□
—□
scrie min
stop
```

```
10 INPUT N
20 DIM A(N)
30 FOR I=1 TO N
40     INPUT A(I)
50 NEXT I
60 LET MIN=A(1)
70 FOR I=2 TO N
80     IF A(I)<MIN THEN LET MIN=A(I)
90 NEXT I
100 PRINT MIN
110 STOP
```

3. Fie $A = (a_1, ..., a_n)$ vectorul dat. Prezentăm în continuare una dintre numeroasele metode de rezolvare ale acestei probleme.

Să presupunem că pentru un anumit $i \in \{1, 2, ..., n - 1\}$ sîntem în situaţia $a_1 \leqslant a_2 \leqslant ... \leqslant a_{i-1}$ şi $a_{i-1} \leqslant a_j$, $\forall j \in \{i, i+1, ..., n\}$. Atunci determinăm valorile x, k cu $x = a_k = \min\{a_i, ..., a_n\}$ şi apoi interschimbăm valorile lui a_i şi a_k, ajungînd astfel în situaţia:

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant ... \leqslant a_i \text{ şi } a_i \leqslant a_j, \forall j \in \{i + 1, ..., n\}.$$

Evident vom efectua calculele de mai sus pentru i luînd succesiv valorile 1, 2, ..., $n - 1$.

```
citeşte a
—pentru i = 1, n − 1, 1
|   x ← a_i; k ← i
|  —pentru j = i + 1, n, 1
|  |  —dacă a_j < x
|  |  |  atunci x ← a_j; k ← j
|  |  —□
|  —□
|   a_k ← a_i; a_i ← x
—□
scrie a
stop
```

```
10 INPUT N
20 DIM A(N)
30 FOR I=1 TO N
40     INPUT A(I)
50 NEXT I
60 FOR I=1 TO N-1
70     LET X=A(I): LET K=I
80     FOR J=I+1 TO N
90         IF A(J)>=X THEN GO TO 110
100            LET X=A(J): LET K=J
110    NEXT J
120    LET A(K)=A(I): LET A(I)=X
130 NEXT I
140 FOR I=1 TO N
150 PRINT A(I)
160 NEXT I
170 STOP
```

4. Deoarece x_1 şi x_2 sînt rădăcinile ecuaţiei $x^2 - sx + p = 0$, avem:

$$x_1^2 - sx_1 + p = 0; \quad x_2^2 - sx_2 + p = 0.$$

Înmulţind prima egalitate cu x_1^{k-2}, iar a doua cu x_2^{k-2} şi adunînd cele două relaţii obţinute, ajungem la $S_k - sS_{k-1} + pS_{k-2} = 0$, adică $S_k = sS_{k-1} - pS_{k-2}$, $\forall k \geqslant 2$. Observăm că $S_0 = 2$, iar $S_1 = s$.

Vom folosi două variabile suplimentare a şi b, astfel încît perechea (a, b) ia succesiv valorile:

$$(S_0, S_1), (S_1, S_2), ..., (S_{k-1}, S_k).$$

Trecerea de la o pereche (a, b) la succesoarea ei se realizează astfel:

$$c \leftarrow s \cdot b - p \cdot a;\ a \leftarrow b;\ b \leftarrow c.$$

```
citeşte s, p, k
a ← 2; b ← s
┌dacă k = 0
│ atunci scrie a; stop
└□
┌pentru i = 2, k, 1
│   c ← s · b − p · a
│   a ← b; b ← c
└□
scrie b
stop
```

```
10 INPUT S,P,K
20 LET A=2: LET B=S
30 IF K>O THEN GO TO 50
40    PRINT A : STOP
50 FOR I=2 TO K
60    LET C=S*B—P*A
70    LET A=B : LET B=C
80 NEXT I
90 PRINT B
100 STOP
```

5. Vom urma algoritmul de reprezentare a numerelor raţionale sub formă de fracţii zecimale prezentat în clasa a IX. Cifrele zecimale vor fi notate în ordine cu $a_1, a_2, \ldots$ $\left(\text{deci } \frac{m}{n} = 0, a_1a_2 \ldots\right)$, iar resturile obţinute prin împărţirile succesive la n vor fi notate prin $r_1, r_2, \ldots$ cu $r_1 = m$.

La fiecare pas vom împărţi pe $10 \cdot r_i$ la n, obţinînd o nouă cifră zecimală a_i şi un nou rest r_{i+1}.

Algoritmul se opreşte în unul dintre următoarele două cazuri:

— se obţine un rest r_{i+1} nul; atunci fracţia nu este periodică $\left(\frac{m}{n} = 0, a_1a_2 \ldots a_i\right)$.

— se obţine un rest r_i cu $r_i = r_k$, $k \in \{1, \ldots, i-1\}$; atunci fracţia este periodică şi putem scrie $\frac{m}{n} = 0, a_1 \ldots a_{k-1}(a_k \ldots a_{i-1})$.

Deoarece toate resturile sînt mai mici decît n, algoritmul se opreşte după cel mult $n+1$ paşi.

```
citeşte m, n
i ← 1; r1 ← m
┌cît timp ri ≠ 0
│ ┌pentru k = 1, i − 1, 1
│ │ ┌dacă ri = rk
│ │ │ atunci scrie 'perioada este'
│ │ │     ┌pentru j = k, i − 1, 1
│ │ │     │ scrie aj
│ │ │     └□
│ │ │       stop
│ │ └□
│ └□
│   x ← 10 · ri;  ai ← [x/n]
│   i ← i + 1;  ri ← x − a(i−1) · n
└□
scrie 'fracţie neperiodică'
stop
```

```
10 INPUT M,N
20 DIM A(N+1): DIM R(N+1)
30 LET I=1: LET R(1)=M
40 IF R(I)=0 THEN GO TO 160
50    FOR K=1 TO I—1
60       IF R(I) <> R(K) THEN GO TO 120
70          PRINT "PERIOADA ESTE:"
80          FOR J=K TO I—1
90             PRINT A(J);
100            NEXT J
110            STOP
120   NEXT K
130   LET X=10*R(I): LET A(I)=INT (X/N)
140   LET I=I+1: LET R(I)=X—A(I—1)*N
150 GO TO 40
160 PRINT "FRACTIE NEPERIODICA"
170 STOP
```

6. Este suficient să determinăm conform algoritmului lui Euclid valoarea $d = (m, n)$ şi apoi să înlocuim pe m şi n cu $\frac{m}{d}$, respectiv cu $\frac{n}{d}$.

7. Funcţia f este bine determinată de vectorii $a = (a_1, a_2, \ldots, a_m)$, $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ şi $c = (c_1, c_2, \ldots, c_m)$ cu $c_i = f(a_i)$, $\forall i = 1, \ldots, m$. Evident $\{c_1, \ldots, c_m\} \subset \{b_1, \ldots, b_n\}$.

a) Dacă $m > n$, atunci este evident că f nu poate fi injectivă. Ne situăm de aceea în continuare în cazul $m \leqslant n$, în care f este injectivă dacă şi numai dacă elementele vectorului c sînt diferite două cîte două, adică dacă $c_i \notin \{c_1, \ldots, c_{i-1}\}$ pentru orice $i = 2, \ldots, m$.

```
citeşte m, n, c
┌dacă m > n
│ atunci scrie 'nu'; stop
└□
┌pentru i = 2, m, 1
│ ┌pentru j = 1, i − 1, 1
│ │ ┌dacă ci = cj
│ │ │ atunci scrie 'nu'; stop
│ │ └□
│ └□
└□
scrie 'da'
stop
```

```
10 INPUT M,N
20 DIM C(M)
30 IF M<=N THEN GO TO 50
40    PRINT "NU": STOP
50 FOR I=1 TO M
60    INPUT C(I)
70 NEXT I
80 FOR I=2 TO M
90    FOR J=1 TO I—1
100      IF C(I) <> C(J) THEN GO TO 120
110         PRINT "NU": STOP
120   NEXT J
130 NEXT I
140 PRINT "DA"
150 STOP
```

b) Dacă $m < n$, atunci f nu poate fi surjectivă. De aceea ne situăm în continuare în cazul $m \geqslant n$, cînd f este surjectivă dacă $\{b_1, \ldots, b_n\} \subset \{c_1, \ldots, c_m\}$, adică pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$ există $j \in \{1, \ldots, m\}$ cu $b_i = c_j$.

```
citeşte m, n, c, b
┌dacă m < n
│ atunci scrie 'nu'; stop
└□
┌pentru i = 1, n, 1
│   ind ← 0; j ← 1
│ ┌cît timp (ind = 0) ∧ (j ≤ m)
│ │ ┌dacă ci = bj atunci ind ← 1
│ │ │            altfel j ← j + 1
│ │ └□
│ └□
│ ┌dacă ind = 0
│ │ atunci scrie 'nu'; stop
│ └□
└□
scrie 'da'
stop
```

```
10 INPUT M,N
20 DIM C(M): DIM B(N)
30 IF M>=N THEN GO TO 50
40    PRINT "NU": STOP
50 FOR I=1 TO M
60    INPUT C(I)
70 NEXT I
80 FOR I=1 TO N
90    INPUT B(I)
100 NEXT I
110 FOR I=1 TO N
120   LET IND=0: LET J=1
130   IF(IND=1) OR(J>M) THEN GO TO 190
140      IF C(I) <> B(J) THEN GO TO 170
150         LET IND=1
160      GO TO 180
170         LET J=J+1
180   GO TO 130
190   IF IND=1 THEN GO TO 210
200      PRINT "NU": STOP
210 NEXT I
220 PRINT "DA": STOP
```

c) Dacă $m \neq n$, atunci f nu poate fi bijectivă. Dacă $m = n$, putem utiliza de exemplu faptul că f este bijectivă dacă şi numai dacă este injectivă.

8. Este suficient să calculăm într-o variabilă S valoarea sumei $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ şi apoi pentru fiecare $i = 1, 2, \ldots, n$ să înlocuim pe a_i prin $\frac{S - a_i}{n - 1}$.

9. Fie dat vectorul $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$

a) Numerele $a_1, a_2, ..., a_n$ sînt în progresie aritmetică dacă şi numai dacă pentru orice $i = 3, ..., n$ avem $a_i - a_{i-1} = a_2 - a_1$.

```
citeşte a                        10 INPUT N
r ← a2 − a1                      20 DIM A(N)
—pentru i = 3, n, 1              30 FOR I=1 TO N
| —dacă ai − ai−1 ≠ r            40   INPUT A(I)
| | atunci scrie 'nu'; stop      50 NEXT I
| —□                             55 LET R=A(2)—A(1)
—□                               60 FOR I=3 TO N
scrie 'da'                       70   IF A(I)—A(I—1)=R THEN GO TO 90
stop                             80     PRINT "NU": STOP
                                 90 NEXT I
                                 100 PRINT "DA": STOP
```

b) Dacă $a_1 = 0$ sau $a_2 = 0$, atunci numerele nu sînt în progresie geometrică. În caz contrar, $a_1, a_2, ..., a_n$ sînt în progresie geometrică dacă şi numai dacă pentru orice $i = 3, ..., n$ avem $\frac{a_i}{a_{i-1}} = \frac{a_2}{a_1}$.

10. Vom calcula $d = (a, b)$. Dacă $a = 0$ sau $b = 0$, atunci $d = a + b$. În caz contrar, cît timp $a \neq b$ efectuăm următoarele calcule:

— dacă $a > b$, atunci $a \leftarrow a - b$, corespunzător egalităţii $(a, b) = (a - b, b)$;

— dacă $a < b$, atunci $b \leftarrow b - a$, corespunzător egalităţii $(a, b) = (a, b - a)$.

În momentul în care $a = b$, avem evident $d = a = b$.

```
citeşte a, b                     10 INPUT A,B
—dacă (a = 0) V (b = 0)          20 IF (A<>0) AND(B<>0) THEN GO TO 40
| atunci scrie a + b; stop       30   PRINT A+B: STOP
—□                               40 IF A=B THEN GO TO 100
—cît timp a ≠ b                  50   IF A<B THEN GO TO 80
| —dacă a > b atunci a ← a − b   60     LET A=A—B
| |           altfel b ← b − a   70   GO TO 90
| —□                             80     LET B=B—A
—□                               90 GO TO 40
scrie a                          100 PRINT A
stop                             110 STOP
```

11. Fie $f = a_1 + a_2X + ... + a_{n+1}X^n$. Cîtul va avea forma: $b_2 + b_3X + ... + b_{n+1}X^{n-1}$, iar restul va avea valoarea b_1 unde:

$$\begin{cases} b_{n+1} = a_{n+1} \\ b_n = a_n + cb_{n+1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ b_2 = a_2 + cb_3 \\ b_1 = a_1 + cb_2 \end{cases}$$

```
citeşte n, a, c                  10 INPUT N,C
bn+1 ← an+1                      20 DIM A (N+1): DIM B(N+1)
—pentru i = n, 1, −1             30 FOR I=1 TO N+1
| bi ← ai + c·bi+1               40   INPUT A(I)
—□                               50 NEXT I
scrie b                          60 LET B(N+1)=A(N+1): PRINT B(N+1)
stop                             70 FOR I=N TO 1 STEP —1
                                 80   LET B(I)=A(I)+C*B(I+1)
                                 90   PRINT B(I)
                                 100 NEXT I
                                 110 STOP
```


12. Fie $f = a_1 + a_2X + ... + a_{n+1}X^n$ cu $n \geqslant 1$ şi $a_{n+1} \neq 0$. Fie $c \in \mathbf{R}$. Se cere să se determine cel mai mare număr natural k cu $(X - c)^k | f$. Vom trata cazul mai general în care nu ştim de la început dacă c este rădăcină a polinomului f.

Expunem în continuare ideea algoritmului. Se pleacă cu $k = 0$. Se calculează cîtul f_1 şi restul r_1 ale împărţirii lui f la $X - c$. Dacă $r_1 = 0$, atunci mărim pe k cu o unitate şi reluăm calculele pentru f_1; în caz contrar se opresc calculele.

Vom calcula coeficienţii cîtului f_1 în variabilele $a_{n+1}, ..., a_2$, iar restul r_1 în variabila a_1. Mai general, coeficienţii cîtului f_j vor fi calculaţi în variabilele $a_{n+1}, a_n, ..., a_{j+1}$, iar restul r_j va fi calculat în a_j; deci $f_j = a_{n+1}X^{n-j} + a_nX^{n-j-1} + ... + a_{j+1}$

```
citeşte n, a, c                  10 INPUT N,C
k ← 0                            20 DIM A(N+1)
—pentru j = 1, n, 1              25 FOR I=1 TO N+1
| —pentru i = n, j, −1           26   INPUT A(I)
| | ai ← ai + c·ai+1             27 NEXT I
| —□                             30 LET K=0
| —dacă aj = 0                   40 FOR J=1 TO N
| | atunci k ← k + 1             50   FOR I=N TO J STEP —1
| | altfel scrie k; stop         60     LET A(I)=A(I)+C*A (I+1)
| —□                             70   NEXT I
—□                               80   IF A(J)<>0 THEN GO TO 110
scrie k                          90     LET K=K+1
stop                             100   GO TO 120
                                 101     PRINT K: STOP
                                 120 NEXT J
                                 130 PRINT K: STOP
```

13. Fie $f = a_1 + a_2X + ... + a_{m+1}X^m$ şi $g = b_1 + b_2X + ... + b_{n+1}X^n$ două polinoame cu coeficienţi reali. Suma lor va fi polinomul:
$h = c_1 + c_2X + ... + c_{p+1}X^p$ unde $p = \max\{m, n\}$, iar $c_i = a_i + b_i$ pentru orice $i \in \{1, ..., p\}$ (cu convenţia că $a_i = 0$ pentru $i > m + 1$ şi $b_j = 0$ pentru $j > n + 1$).

Algoritmul constă în următoarele:

— se iniţializează variabilele $c_1, c_2, ..., c_{p+1}$ cu zero;

— pentru $i = 1, 2, ..., m + 1$, la valoarea lui c_i se adaugă a_i;

— pentru $i = 1, 2, ..., n + 1$, la valoarea lui c_i se adaugă b_i.

14. Fie ecuaţia $a_1 + a_2x + ... + a_{n+1}x^n = 0$. Ea este reciprocă dacă şi numai dacă pentru orice $i = 1, 2, ..., \left[\frac{n+1}{2}\right]$ avem $a_i = a_{n+2-i}$.

```
citeşte n, a                     10 INPUT N
—pentru i = 1, [(n+1)/2], 1      20 DIM A (N+1)
| —dacă ai ≠ an+2−i              30 FOR I=1 TO N+1
| | atunci scrie 'nu'; stop      40   INPUT A (I)
| —□                             50 NEXT I
—□                               60 LET K = INT ((N+1)/2)
scrie 'da'                       70 FOR I=1 TO K
stop                             80   IF A(I)=A(N+2—I) THEN GO TO 100
                                 90     PRINT "NU": STOP
                                 100 NEXT I
                                 110 PRINT "DA": STOP
```

Bibliografie

1. H. Dumitraşcu, *Să învăţăm BASIC*, Editura Albatros, 1987.
2. L. State, *Limbajul BASIC pentru microcalculatoare*, Tipografia Universităţii din Bucureşti, 1988.

Cuprins



Coli de tipar : 10
Bun de tipar : 3.VII.1989

Com. nr. 93 133/35108
Combinatul poligrafic
„CASA SCÎNTEII"
Bucureşti — R.S.R.